CÁLCULO DO CAMPO E POTENCIAL ELÉTRICO EM UMA CASCA CONDUDORA DELGADA ELETRIZADA

Fís. Alberto Ricardo Präss

DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO

$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$

onde:

$\vec{D}$ é a densidade de fluxo elétrico

ε é a permissividade do meio

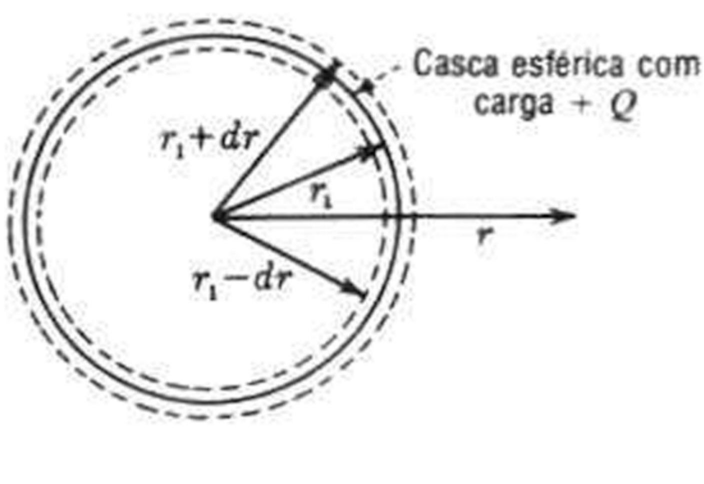
$\vec{E}$ é o campo elétrico

LEI DE GAUSS e o FLUXO ELÉTRICO SOBRE UMA SUPERFÍCIE FECHADA

A integral de superfície da componente normal da densidade de fluxo elétrico $\vec{D}$ sobre qualquer superfície fechada é igual à carga englobada por esta superfície.

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \oint_V \rho dv = Q$$

Suponha que uma carga positiva Q esteja distribuída uniformemente sobre uma casca esférica imaginaria de raio r_1. O meio é o ar.



Aplicando-se a lei de Gauss através da integração de $\vec{D}$ sobre uma superfície esférica (de raio r_1–dr) imediatamente inferior à casca carregada, temos

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0$$
$$\oint_S \varepsilon_o \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$
$$\varepsilon_o \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$
$$E = 0$$

Pois a carga englobada é zero. Segue da simetria que $\vec{E}$ no interior da casca é zero.

Aplicando-se a lei de Gauss na casca esférica (de raio r_1+dr) imediatamente exterior a casca, temos, desprezando os infinitésimos (decorrentes da conversão de coordenadas esféricas para retangulares),

$$\varepsilon_o \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \varepsilon_o E 4\pi r_1^2 = Q$$
$$\varepsilon_o E 4\pi r_1^2 = Q$$
$$E = \frac{Q}{4\varepsilon_o \pi r_1^2}$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r_1^2}$$
$$E = k \frac{Q}{r_1^2}$$

Este valor de campo é idêntico àquele obtido a uma distancia r_1 de uma carga pontual Q. Concluímos, portanto, que o campo fora de uma casca carregada é o mesmo se a carga Q estivesse concentrada no centro. Resumindo, o campo em qualquer lugar devido à casca esférica carregada é:

$E = 0$ para $r \le r_1$, dentro da casca

$E = k\dfrac{Q}{r^2}$ para $r \ge r_1$, fora da casca

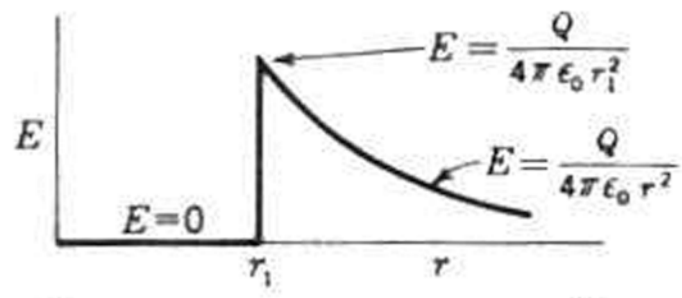


Gráfico do campo elétrico E em função da distancia r.

O potencial absoluto para uma distancia r fora da casca é dado por

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{r}$$

Substituindo o valor de E dado por

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Então, temos

$$V = -kQ\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{kQ}{r}$$

Na casca, onde $r=r_1$, temos

$$V = \frac{kQ}{r_1}$$

Como o campo E dentro da casca é zero, nenhum trabalho é necessário para mover uma carga de prova no seu interior, e, por conseguinte, o potencial é constante, sendo igual ao valor na casca. Resumindo, o potencial elétrico, em qualquer lugar, devido à casca esférica carregada de raio r_1 é

$$V = \frac{kQ}{r_1} \text{ para } r \le r_1 \text{, dentro da casca}$$

$$V = \frac{kQ}{r} \text{ para } r \ge r_1 \text{, fora da casca}$$

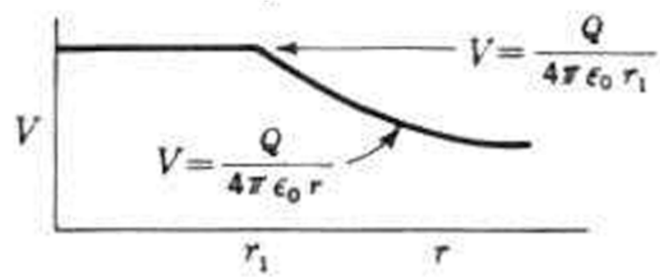


Gráfico do potencial elétrico V em função da distancia r.

Pelas equações percebemos que o potencial elétrico é contínuo, e igual na casca ($r=r_1$). Mas o campo elétrico é descontínuo, saltando abruptamente de zero no interior da casca, ao valor $k\frac{Q}{r_1^2}$ imediatamente depois da casca. Isto resulta da hipótese de que a casca carregada tem espessura zero.