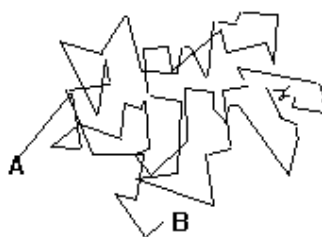


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

FNC-314 - Laboratório de Estrutura da Matéria II

MOVIMENTO BROWNIANO



FÍSICA EXPERIMENTAL - VI

(Lab. de Estrutura da Matéria)

MOVIMENTO BROWNIANO

ÍNDICE

- Estudo do Movimento Browniano.....	2
I. Introdução.....	2
II. Experiência.....	2
III. Referências Bibliográficas.....	3
- Apêndice A.....	4
Determinação de $\langle x^2 \rangle$ pelo método de mínimos quadrados..	4
Processos para minimizar χ^2	5
Processo para avaliar o erro.....	5
Caso geral de uma função com vários parâmetros.....	7
-Apêndice B	
Correção para o valor da viscosidade do ar.....	9
Gráfico para estimativa do raio da gota.....	10

ESTUDO DO MOVIMENTO BROWNIANO

I. Introdução

O movimento Browniano já deve ter sido observado na experiência de Millikan: algumas gotas tinham movimento caótico, sem direção preferencial, que chegava a perturbar a medida dos tempos de percurso. A causa deste movimento está relacionada com a natureza discreta do gás atmosférico; o ar não é um fluido uniforme, mas é formado de moléculas. A gota está sujeita a choques com as moléculas em todas as direções. Se a gota for suficientemente pequena, o número de choques num dado intervalo de tempo, num dado sentido, pode não ser exatamente compensado pelo número de choques no sentido oposto, daí o deslocamento.

A frequência com que ocorrem as colisões, ou as distâncias percorridas entre colisões sucessivas estão relacionadas também com as características físicas do meio, que dão conta do movimento térmico das moléculas que o compõem. Consulte as referências bibliográficas (ref. [1 a 6]).

A teoria cinética dos gases também prevê uma distribuição de energia das moléculas; a energia média é proporcional ao produto kT (equipartição de energia). Assim, a energia cinética das moléculas aumenta com a temperatura e aumenta também a energia transferida num choque.

O movimento caótico da gotinha de óleo no ar está relacionado com a agitação das moléculas do ar e com o número de moléculas por unidade de volume. A medida do deslocamento médio da gotinha permite calcular o número de Avogadro. Para uma análise estatística, consulte o apêndice A e as referências [3,8 e 9].

II.- Experiência

O instrumental é o mesmo que foi utilizado para a experiência de Millikan. Uma gotinha de óleo de tamanho conveniente é equilibrada entre as placas do condensador e são observados seus movimentos numa dada direção. Os ajustes do aparelho e da iluminação devem ser feitos da maneira já conhecida.

A análise quantitativa do movimento da gotinha permite calcular o número de Avogadro através da expressão:

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\eta a \langle x^2 \rangle}$$

Onde R é a constante dos gases perfeitos ($=8.37 \times 10^7$ erg/mol K), T a temperatura absoluta do sistema (K), η o coeficiente de viscosidade do ar, a o raio da gota, t o intervalo de tempo em que são observados os deslocamentos e $\langle x^2 \rangle$ o deslocamento quadrático médio (veja por exemplo as referências [1 a 6]).

As questões a seguir devem ser usadas como orientação para a realização da experiência:

- Qual a melhor direção a ser escolhida para observação do movimento Browniano (vertical ou horizontal)?

- Levando em conta o processo que produz esse movimento, faça uma estimativa do tamanho da gota escolhida.
- Reportando-se a experiência de Millikan, qual a grandeza mensurável que pode fornecer o raio da gotinha? (veja apêndice B para estimativa inicial do raio da gota). Procure uma gotinha de modo que seu raio possa ser determinado com erro da ordem de 5%.
- Observe o movimento da gota na direção escolhida e faça uma coleção de medidas de sua posição, tendo em vista obter $\langle x^2 \rangle$ (x o deslocamento em cada intervalo de tempo) com um erro menor que 10%. Faça pelo menos 200 medidas de deslocamento, usando intervalos de tempo de 10s.
- Construa histogramas de deslocamento para intervalos de 10s, 20s e 30s. Obtenha σ^2 para os três histogramas, usando os métodos descritos no apêndice A.
- O número de Avogadro N_A deve ser calculado usando σ^2 ou $\langle x^2 \rangle$? Justifique sua resposta.
- Calcule o número de Avogadro N_A e analise a necessidade de correção para o coeficiente de viscosidade. Ver apêndice B para obter a viscosidade.
- Calcule o erro associado à determinação de N_A e discuta a influência dos fatores significativos.
- Faça uma introdução ao trabalho baseada na bibliografia citada e no desenvolvimento da parte experimental realizada. Procure justificar o método utilizado e o cálculo do número de Avogadro.

II. Referências Bibliográficas

- 1) A. Einstein - Brownian Motion
- 2) Tipler - Foundations of Modern Physics
- 3) Reif - Fundamentals of Statistical and Thermal Physics
- 4) Max Born - Física Atomica
- 6) Harnell e Livingood - Experimental Atomic Physics
- 7) Millikan - Electrons + and -
- 8) Evans - The Atomic Nucleus
- 9) Bevington - Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.
- 10) Squires - Pratical Physics
- 11) Lavenda, B.H. - Brownian Motion - Sci. Amer. p. 56 (fev. 1985)
- 12) Schumacher, R.T. - Am. J. Phys. 54, 137 (1986)
- 13) Feder, J. - Fractals - Plenum Press N.Y. (1988)
- 14) Mandelbrot, B.B. - The Fractal Geometry of Nature, Freeman (1982)
- 15) Voss, R.F. - in: The Science of Fractal Images, ed. Heinz Otto - Peitgen, Springer Verlag (1988)

APÊNDICE A

Determinação de $\langle x^2 \rangle$ pelo método dos mínimos quadrados.

Os métodos descritos abaixo não se restringem à experiência de movimento Browniano, mas podem ser aplicados em geral, para ajuste de uma função arbitrária de n parâmetros.

Como foi visto acima, o número de Avogadro, cuja obtenção é um dos objetivos desta experiência, pode ser expresso como:

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\eta a \langle x^2 \rangle} \quad (1)$$

Vamos tratar da avaliação de $\langle x^2 \rangle$: $\langle x^2 \rangle$ ou o desvio quadrático médio, pode ser calculado diretamente da flutuação dos deslocamentos. De fato, lembrando a definição de variância:

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (2)$$

e lembrando que a média $\langle x \rangle$ é nula (não há direção preferencial para o movimento), temos $\langle x^2 \rangle = \sigma_f^2$, calculado diretamente dos dados.

Esta é uma primeira estimativa e deve ser encarada como tal. Deve-se tratar o problema de um modo mais complexo, mas que pode ser generalizado para avaliação de parâmetros de uma curva qualquer. Os deslocamentos de distribuem de acordo com uma gaussiana de média zero e variância $\langle x^2 \rangle = \sigma_f^2$. A gaussiana normalizada é dada pela expressão:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

O histograma dos deslocamentos tem Δ como passo utilizado no eixo x dos deslocamentos, y_i é o número de vezes que um deslocamento x_i é observado e N é o número total de medidas ($N = \sum y_i$). Supondo uma distribuição gaussiana para os deslocamentos e sabendo que a área sob o histograma experimental é $N\Delta$, o histograma experimental deve ser comparado com a gaussiana $f(x)$ dada por:

$$f(x_i) = \frac{N\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

O melhor ajuste dará σ , ou seja $\langle x^2 \rangle$. O melhor valor de σ pode ser estimado pelo método dos mínimos quadrados, que consiste em minimizar a expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - f(x_i)}{y_i} \right]^2 \quad (5)$$

onde y_i é o número de medidas no canal de histograma centrado em x_i e $f(x_i)$ o valor da gaussiana no canal centrado em i (ver ref. [4]).

Neste caso, poder-se-ia colocar $\frac{\partial \chi^2}{\partial \sigma} = 0$ e resolver a equação em σ , mas esta é não linear e complicada. Este problema pode ser contornado da maneira descrita a seguir.

O uso de y_i no denominador de (5) pressupõe que o erro associado ao valor do canal i seja $\sqrt{y_i}$, ou seja, que a contagem no canal y_i se distribui segundo uma curva de Poisson. Esta aproximação é razoável, mas tende a superestimar o erro (a distribuição correta é a binomial).

Processo para minimizar o χ^2 .

O método para minimizar o χ^2 nos casos em que a equação $\frac{\partial \chi^2}{\partial \sigma} = 0$ não pode ser resolvida sem grandes dificuldades é o seguinte:

- calcula-se o χ^2 para vários valores do parâmetro da curva teórica, no caso σ , em torno do valor de uma primeira estimativa (aqui a variância, σ_f).
- faz-se um gráfico dos χ^2 's em função do parâmetro variado σ .
- localiza-se no gráfico o mínimo, e repete-se o procedimento em torno do mínimo, refinando o valor do parâmetro (σ).

Achado este valor (σ_o), deve-se determinar seu erro. Esta tarefa é bem mais complicada.

Processos para avaliar o erro.

São apresentados três métodos usualmente empregados para esta finalidade.

Processo 1: (Especificamente para o caso de curvas que dependem de apenas um parâmetro)

Calcula-se o erro por propagação:

$$\varepsilon_{\sigma}^2 = \sum_i \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y_i} \right]^2 \varepsilon_i^2 = \sum_i \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y_i} \right]^2 y_i$$

já que $\varepsilon_i = y_i$ no nosso caso. A dificuldade deste método, no presente caso, está em avaliar $\frac{\partial \sigma}{\partial y_i}$, já que não temos σ em função de y_i . Mas a condição de minimização de

χ^2 , $\frac{\partial \chi^2}{\partial \sigma} = 0$, pode ser derivada em relação a y_i :

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_i \partial \sigma} = 0$$

Pode-se então separar $\frac{\partial \chi^2}{\partial y_i}$. Mas o cálculo é longo.

Processo 2: (este processo, mais numérico, é mais frequentemente utilizado em programas de computador)

A ref. [9] trata do ajuste por mínimos quadrados de funções lineares ou não nos parâmetros. Demonstra-se que o erro ε_i de um parâmetro a_j é $\varepsilon_j^2 = \alpha_{jj}^{-1}$ onde α_{jj}^{-1} é o elemento diagonal da matriz inversa usada na expressão:

$$\alpha_{jk} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_k}$$

(Veja também a apostila do primeiro bimestre de Lab. Estrutura da Matéria I)

No nosso caso, só ha um parâmetro, σ . Portanto:

$$\alpha_{11} = \sum \frac{1}{y_i} \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial \sigma} \right]^2$$

$$\varepsilon_{\alpha}^2 = \alpha_{11}^{-1} = \frac{1}{\sum \frac{1}{y_i} \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial \sigma} \right]^2}$$

A derivada $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ é trivial. Este processo que dá valores exatos para uma função linear nos parâmetros, fornece bons valores se calculado na situação em que χ^2 é mínimo em todos os parâmetros.

Processo 3: (estimativa utilizada em situações complicadas)

Quando o cálculo do erro se torna demasiadamente complexo, é comum em física experimental, se usar a seguinte regra (ref. [9]):

- achado o valor mínimo (σ_0) com $\chi^2 = \chi_0^2$, procura-se o valor de σ tal que $\chi_{\sigma}^2 = \chi_0^2 + 1$. Em geral há dois valores, um inferior e um superior. Estes delimitam uma faixa de incerteza e pode-se estimar ε_{σ} como a metade deste intervalo.

Do mesmo modo que foi possível avaliar $\langle x^2 \rangle_f$ a partir dos dados, existe a possibilidade de avaliar o erro de $\langle x^2 \rangle_f$. De fato, quando se faz uma medida repetidas vezes, espera-se que os valores se distribuam segundo uma gaussiana, com largura igual ao erro. É possível achar um “erro” do erro dado por:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2N-2}} \text{ (ref. [10], pg. 18)}$$

onde σ é o erro da medida. Veja a semelhança com a experiência realizada. Tentar medir a posição da gota que sofre movimento Browniano leva a uma indeterminação grande da posição. Mas o interesse não está na posição, mas na flutuação da posição, ou seja no *erro da posição*, que seria dado por $\langle x^2 \rangle$. então o erro de $\langle x^2 \rangle_f$ nada mais é que o erro do erro e pode-se escrever:

$$\varepsilon_{\sigma_f} = \frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_f}}{\sqrt{2N-2}}$$

É claro que, do mesmo modo que $\sigma_f^2 = \langle x^2 \rangle_f$, ε_{σ_f} é uma primeira aproximação que deve ser encarada como tal, como ponto de partida e ordem de grandeza.

Caso geral de uma função de vários parâmetros

Desde o início, foi imposto, como justificativa que a distribuição tinha média zero e área N. No entanto, pode acontecer que por alguma razão haja uma direção preferencial: vento, capacitor não nivelado etc. Além disso, a curva pode ter uma deformação e sua área não ser N mas um outro valor próximo (embora seja difícil aceitar que a área não seja o número de dados tomados!).

Mas para efeito de exemplo, vamos considerar que os três parâmetros não sejam determinados (embora seja necessário ter valores iniciais estimados). A ref. [9], cap. 11, trata de vários modos de determinar estes parâmetros. O processo mais simples é o da *grade*, descrito a seguir.

A função que queremos ajustar é:

$$f(x_i) = \frac{N\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

com valores iniciais $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$, N o número de dados e $\mu = \langle x \rangle$.

- fixa-se dois parâmetros (por exemplo σ e N)
- varia-se o parâmetro livre (no caso a posição μ) até achar o mínimo χ^2 .
- fixa-se este parâmetro no valor correspondente ao mínimo χ^2 , μ_0 e mantendo um dos outros fixos (p. ex. N), varia-se σ até achar o novo χ^2 mínimo.
- fixa-se σ em σ_0 (no mínimo) e varia-se o terceiro parâmetro (N) até encontrar o menor χ^2 .
- volta-se ao início, recomeçando-se com o novo (e melhor) conjunto de parâmetros.

O processo é repetido até que os parâmetros não variem significativamente de uma iteração para outra, assim como o valor de χ^2 mínimo. Tem-se então, o melhor valor para os três parâmetros simultaneamente. Este método pode ser estendido a n parâmetros mas torna-se tedioso e de convergência lenta. Para avaliar o erro pode-se usar o processo 2, montando-se a matriz α no mínimo χ^2 e invertendo-a. Ou então, o processo 3, para cada parâmetro, mantendo os outros fixos em seus pontos de mínimo.

Caso os dados apresentem uma média significativamente não nula (em relação à largura da distribuição), deve-se minimizar o χ^2 em σ e μ simultaneamente como descrito logo acima. No caso de $\mu = \langle x \rangle$ ser desprezível em relação a σ , o processo de um parâmetro, σ , pode ser usado. No caso de $\mu \neq 0$, o que se usa na equação (1) para calcular N_A , σ^2 ou $\langle x^2 \rangle$? Justifique.

APÊNDICE B

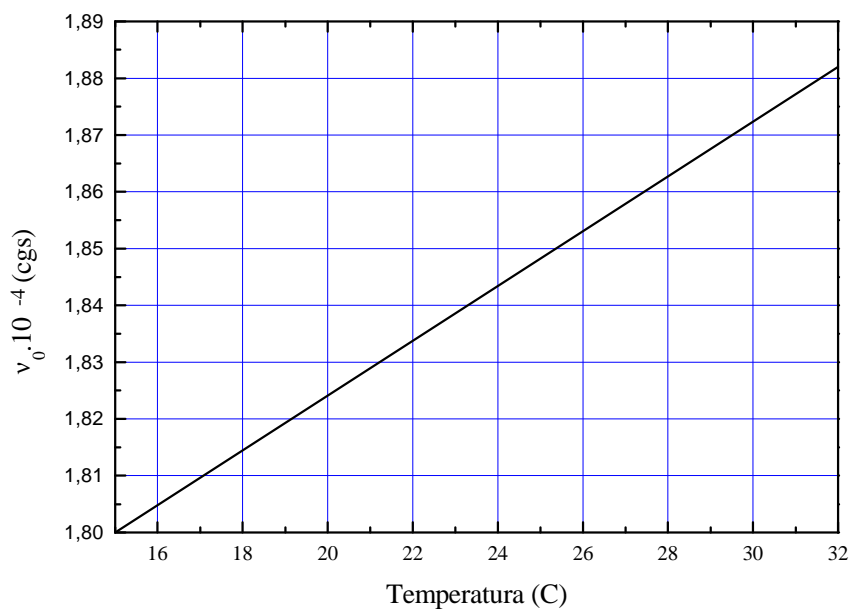
I - Correção para o valor da viscosidade do ar

Tendo em vista que o diâmetro da gota é comparável com o livre caminho médio das moléculas no ar ($L \sim 10^{-5}$ cm), não se pode desprezar a não homogeneidade do fluido. Desta maneira, requer-se efetuar uma correção no coeficiente de viscosidade do ar:

$$\eta = \eta_0 \left[1 + \frac{b}{p \cdot a} \right]^{-1}$$

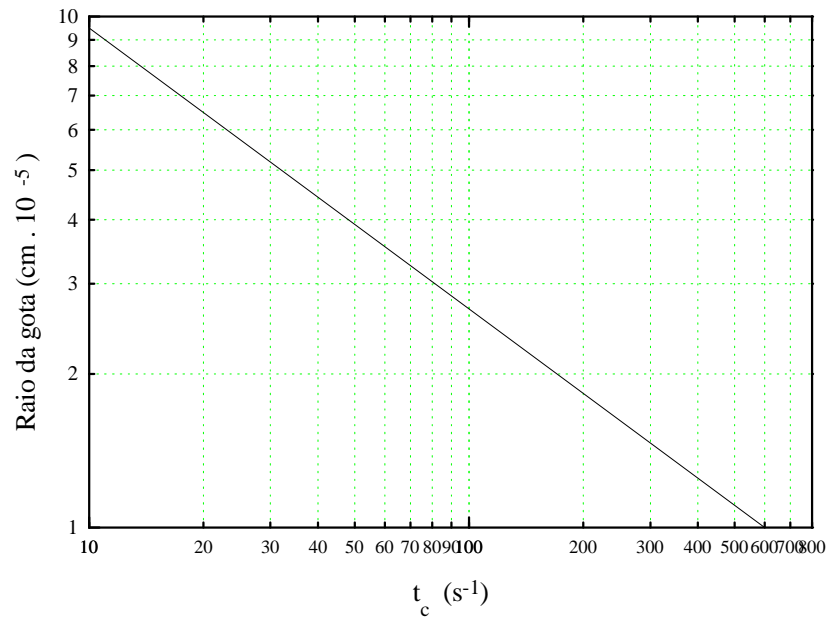
onde p é a pressão atmosférica, η_0 o coeficiente de viscosidade à temperatura ambiente e $b=6.17 \cdot 10^{-4}$ (cm de Hg) cm, quando a pressão for medida em cm Hg.

Os valores de h_0 em função da temperatura estão representados no gráfico seguinte.



Variação do coeficiente de viscosidade (v_0) com a temperatura do ar.

II - Estimativa do raio da gota



Representação do raio da gota em função do tempo de queda. O tempo representado na abscissa corresponde a um espaço percorrido de 1mm.