Aspectos Históricos das Bases Conceituais das Relatividades

José Maria Filardo Bassalo
Departamento de Física da UFPA
66075-900 - Belém, Pará
http://www.amazon.com.br/bassalo

Trabalho recebido em 25 de fevereiro de 1996

Desde a Antiguidade até hoje, o Homem procura entender o movimento de um corpo em relação a um outro em movimento uniforme ou acelerado, movimento relativo esse que é a base conceitual das Relatividades (Restrita e Geral). Neste artigo, vamos mostrar como se deu a evolução dessa procura, examinando os trabalhos de Zenão de Eléia, Giordano Bruno, Galileu, Newton, Clairaut, Euler, Coriolis, Mach e Einstein.

Parece haver sido o filósofo grego Zenão de Eléia (c.500-f.c.450) o primeiro a se preocupar com o movimento relativo dos corpos. Com efeito, em seu paradoxo do **estádio** ou dos **bastões em movimento**, Zenão considerou que se dois bastões (A,B) de iguais tamanhos se deslocarem igualmente (hoje, diríamos, com a mesma velocidade e em sentidos opostos) em relação a um terceiro (C) mantido fixo, então o observador em A (ou B) vê, num mesmo intervalo de tempo, um deslocamento do bastão B (ou A) duas vezes maior que o do bastão C. Em vista disso, Zenão concluiu que o movimento era impossível.[1]

Essa dificuldade de entender o movimento relativo dos corpos permaneceu por muitos séculos, até ser retomada no século 17, por intermédio dos italianos, o filósofo Giordano Bruno (1548-1600) e o físico, matemático e astrônomo Galileu Galilei (1564-1642). Para poder entender o movimento de um corpo em relação a um segundo, também em movimento, Giordano Bruno propôs experiências que poderiam ser realizadas a bordo de um navio em movimento uniforme. Assim, se uma pessoa se colocasse no extremo do mastro de um navio e jogasse um corpo no pé desse mastro ou em um ponto qualquer do tombadilho do navio, tal corpo seguiria uma trajetória reta na direção do alvo escolhido, qualquer que fosse a velocidade constante do navio.

Convicto de que um navio em movimento uniforme arrasta qualquer corpo com ele, Giordano Bruno propôs então uma outra variante daquela experiência. Sejam duas pessoas, admitiu Giordano, uma no navio e a outra na margem do rio. Então, quando estiverem uma defronte da outra, deixam cair uma pedra da mesma altura, e em queda livre. Cada pessoa, em particular, verá cair sua pedra ao pé da vertical, numa trajetória retilílinea. No entanto, a trajetória descrita pela pedra lançada por uma dessas pessoas, vista pela outra, será uma curva. Por exemplo, a pessoa do navio verá a pedra lançada pela que está na margem, cair em direção à popa de sua embarcação.[2]

Argumentos desse tipo foram também considerados por Galileu em sua Carta a Ingoli (Francesco Ingoli (1578-1649)), escrita em 1624. Nesta, afirmou que a pedra que cai do alto do mastro de um navio, esteja este imóvel ou em movimento, sempre cai ao pé do mastro, concordando com Giordano Bruno.[3]

Esse mesmo tipo de problema foi retomado por Galileu em seu livro *Diálogo sobre os dois Principais Sistemas do Mundo: o Ptolomaico e o Copernicano,* publicado em 1632, no qual analisou a queda de um corpo em um navio parado ou em movimento, discutindo também, a queda de um corpo do alto de uma torre, o movimento de projéteis e o vôo das aves, em uma Terra em movimento. Em toda essa discussão Galileu utilizou o **princípio da relatividade do movimento** ou **princípio da independência dos movimentos** para refutar as objeções aristotélicas sobre o movimento de nosso planeta.[4] Esse mesmo princípio seria utilizado por Galileu para demonstrar a trajetória parabólica de corpos lançados horizontalmente ou obliquamente de uma superfície acima do solo, conforme registrou em seu livro *Discursos e Demonstrações Matemáticas em torno de Duas Novas Ciências*,[5] publicado em 1638.[6]

Esse princípio de Giordano Bruno-Galileu - hoje conhecido como **Princípio de Galileu ou Lei de Composição de Velocidades de Galileu** -, tem o seguinte significado físico: a velocidade de um objeto, em relação a um corpo em repouso, é igual a velocidade que ele tem em relação a um outro corpo que se desloca com velocidade constante em relação ao corpo parado, acrescida desta última velocidade. Na linguagem atual, esse resultado é deduzido da expressão: $x' = x + Vt$, onde x' é a posição de uma partícula em relação a um objeto fixo O', e x é posição dessa mesma partícula em relação a um outro objeto O que se desloca com uma velocidade constante (V) em relação ao objeto O', e na direção de uma reta escolhida (no caso, o eixo dos x' (ou dos x)). Com efeito, usando-se essa expressão e mais o fato de que t = t',[7] tem-se: $\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} + V\frac{dt}{dt} \rightarrow v' = v + V$.

Muito embora Galileu não usasse esse princípio na forma analítica descrita acima, ele o utilizava através de argumentos lógicos diretos, auxiliados pela Geometria. Pois bem, foi também dessa mesma maneira que Galileu demonstrou em seu já referido *Diálogo*, que esse princípio levava a um outro resultado importante, qual seja, o de que era impossível determinar se um navio está ancorado ou em movimento retilíneo uniforme, realizando uma experiência mecânica (em sua época, experiência física) em algum de seus camarotes fechados.

O estudo do movimento relativo de corpos foi mais elaborado pelo físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) em seu famoso *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*,[8] publicado em 1687. Newton inicia esse livro com uma série de definições, nas quais apresenta os conceitos de **quantidade de movimento**: - "É a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir da velocidade e da quantidade de matéria"; de **força inata da matéria (vis insita)**: - "É um poder de resistir, através do qual todo corpo, estando em um determinado estado, mantém esse estado, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta"; e de **força centrípeta**: - "E aquela pela qual os corpos são dirigidos ou impelidos, ou tendem de qualquer maneira para um ponto como centro".[9]

Logo em seguida à apresentação comentada dessas definições, Newton apresenta um **Escólio** no qual novos conceitos (também comentados) são formulados, principalmente as famosas definições de **espaço**: - "... absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel...", e de **tempo**: - "... absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e da sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração..." Ainda nesse **Escólio**, Newton examina a questão relacionada com movimentos verdadeiros e relativos dos corpos, afirmando que: - "As causas pelas quais movimentos verdadeiros e relativos são diferenciados um do outro, são as forças imprimidas sobre os corpos para gerar movimento. O movimento verdadeiro não é nem gerado e nem alterado, a não ser por alguma força imprimida sobre o corpo movido; mas o movimento relativo pode ser gerado ou alterado sem qualquer força imprimida sobre o corpo... Os efeitos que distinguem movimento absoluto de relativo são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento a partir do eixo do movimento circular. Pois não há tais forças em um movimento circular puramente relativo; mas em um movimento circular verdadeiro e absoluto elas são maiores ou menores, dependendo da quantidade de movimento. Se um recipiente, suspenso por uma longa corda, é tantas vezes girado, a ponto de a corda ficar fortemente torcida, e então enchido com água e suspenso em repouso junto com a água; a seguir, pela ação repentina de outra força, é girado para o lado contrário e enquanto a corda desenrola-se, o recipiente continua no seu movimento por algum tempo; a superfície da água, de início, será plana, como antes de o recipiente começar a se mover; mas depois disso, o recipiente, por comunicar gradualmente o seu movimento à água, fará com que ela comece nitidamente a girar e a afastar-se pouco a pouco do meio e a subir pelos lados do recipiente, transformando-se em uma figura côncava (conforme eu mesmo experimentei), e quanto mais rápido se torna o movimento, mais a água vai subir, até que, finalmente, realizando suas rotações nos mesmos tempos que o recipiente, ela fica em repouso relativo a ele.[11]

A análise dessa experiência levou Newton a concluir que o repouso ou o movimento de um corpo é sempre tomado em relação ao **espaço absoluto,** considerado como um sistema de referência em repouso ou em translação uniforme em relação às estrelas fixas. Por outro lado, continua Newton, quando se tenta descrever o movimento de um corpo com relação a um sistema de referência em movimento de rotação uniforme em relação a esse espaço absoluto, é necessário se considerar novas forças que, contudo, são apenas fictícias, decorrentes apenas da ação do espaço absoluto sobre a matéria. Assim, no caso da experiência do balde girante, a forma côncava (na realidade, forma de um parabolóide[11]) atingida pela água, decorre da ação da força centrípeta "criada" pelo espaço absoluto.[12]

A tentativa de descrever o movimento de um corpo em relação ao **espaço absoluto**, espaço este mais tarde conceituado como **referencial inercial**, foi sendo cada vez mais estudado por Newton e seus seguidores. Com efeito, ainda no Livro I de seus *Princípios*, Newton enunciou os famosos **axiomas** ou **leis do movimento**: 1a. Lei - "Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele"; 2a. Lei - "A mudança da quantidade de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida"; 3a. Lei - "A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, a ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas".[13]

Conforme vimos anteriormente, Galileu havia dito que era impossível determinar se um navio está parado ou em movimento uniforme, por intermédio de uma experiência mecânica realizada em um de seus camarotes fechados. Pois bem, essa questão, que hoje tem o estatuto de um teorema: - "As leis da Mecânica são invariantes por uma transformação de Galileu", é facilmente demonstrada, na notação atual, usando-se a Segunda Lei de Newton e a Lei de Composição de Velocidades Galileu. Vejamos como. Seja a Lei de Newton: $F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$. Tomando-se a lei de composição de velocidades de Galileu ($\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + V$) e considerando-se as hipóteses de Newton sobre o aspecto absoluto do tempo (t = t') e da massa (m = m'), então: $m\frac{d^2x}{dt^2} = m'\frac{d^2x'}{dt'^2}$. Portanto, essa igualdade das forças significa dizer que a **lei de Newton** é a mesma em qualquer referencial, quer esteja em repouso, quer esteja em movimento retilíneo uniforme.

Muito embora Newton haja falado no papel fictício das forças centrípetas nos movimentos curvilíneos,[14] estas só começaram a ser entendidas a partir da metade do século 18. Vejamos de que maneira. Com o objetivo de estudar os efeitos da gravidade e da força centrífuga sobre a Terra em rotação, o matemático francês Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) começou a estudar os referenciais não-inerciais. Assim, em seu livro *Théorie de la Figure de la Terre,* de 1743, demonstrou que "um corpo visto de um referencial em rotação (não-inercial), experimenta uma 'força aparente' por unidade de massa, igual e de sentido contrário à aceleração que esse referencial tem em relação a um referencial inercial". No entanto, como Clairaut não havia calculado corretamente essas forças (mais tarde denominadas de **forças não-inerciais: centrífuga e de Coriolis**) o físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), em seu estudo sobre as máquinas hidráulicas, realizado em 1755, passou a estudá-las usando um artifício matemático qual seja, o da escolha de variáveis angulares adequadas - os famosos **ângulos de Euler**. Porém, ao tentar calcular a **força de Coriolis** usando coordenadas cartesianas retangulares, encontrou um valor metade do correto, conforme demonstraria o engenheiro e matemático francês Gustave-Gaspard Coriolis (1792-1843), na primeira metade do século 19, conforme veremos a seguir.[15]

Em seu trabalho intitulado *Sur les équations du movement relatif des systèmes de corps*, de 1835, Coriolis observou que a Segunda Lei de Newton (hoje escrita na forma $\vec{F} = m\vec{a}$) deveria ser modificada ao ser aplicada ao movimento de corpos relacionados com um sistema de referência em rotação, para incluir uma **força de inércia** atuando perpendicularmente à direção de seu movimento.[16] Hoje, usando-se o formalismo do cálculo vetorial, é relativamente simples obter essas **forças não-inerciais,** pois basta estudar o que acontece num sistema referencial S' em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ com respeito a um referencial inercial S, com $\vec{\omega}$ apontando numa direção arbitrária. Assim, a equação de movimento de um corpo de massa **m** no sistema S' será descrito pela seguinte equação:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a}(=\vec{F}) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r},$$

onde o segundo termo do lado direito é a expressão geral da **força centrífuga**, e o terceiro representa a expressão geral da **força de Coriolis**.[17] Essas forças, contudo, na Mecânica Newtoniana, são consideradas fictícias.

Conforme dissemos anteriormente, o espaço absoluto newtoniano foi também criticado por Mach, em seu célebre livro *A Mecânica e o Estudo Crítico e Histórico de seu Desenvolvimento*, editado em 1883,[18] a partir da experiência do balde com água realizada por Newton. Tomando como base a idéia de que as forças inerciais decorrem da distribuição de massa do Universo (portanto, reais), e não apenas de uma simples mudança de referencial (de inercial para não-inercial) como demonstraram Clairaut e Coriolis, Mach explicou a forma parabolóide da superfície da água no balde girante de Newton, como decorrente do movimento relativo de rotação da mesma em relação ao conjunto de todas as massas do Universo. Para ilustrar sua hipótese - hoje conhecida como **princípio de Mach** -, propôs a seguinte **experiência de pensamento** ou **experiência imaginada (Gedankenexperimente**, nome cunhado por ele próprio). Se girarmos rapidamente um grande cílindro de paredes bem espessas em torno do balde com água, dever-se-á observar a mesma forma parabolóide para a superfície da água girante.

Apesar da grande dificuldade de realização dessa experiência,[19] convém examinar seus principais resultados. Assim, de acordo com Mach, a aceleração deixaria de ser uma grandeza absoluta (segundo a Mecânica Newtoniana), pois ela seria definida em relação ao centro de massa do Universo, e a massa inercial não seria mais uma propriedade intrínseca de um corpo, pois dependeria da distribuição de massas do Universo.[20] Em decorrência disso, as forças de inércia não seriam mais geradas pela aceleração dos corpos em relação ao espaço absoluto newtoniano, e sim, devido ao movimento relativo dos mesmos com respeito a todos os corpos do Universo, isto é, elas deixariam de ser fictícias e passariam a ser reais. Esse resultado é frontalmente contra a Mecânica Newtoniana, pois que, para esta, o **referencial inercial** é aquele para o qual a aceleração é nula. Porém, para a Mecânica Machiana, todos os referenciais são não-inerciais uma vez que o fato de existir um referencial inercial decorre, tão-somente, de determinada distribuição de massa no Universo, e que, uma alteração súbita nessa distribuição faz aparecer uma aceleração local no referencial inercial, destruindo, desta forma, a sua inercialidade.

A questão do espaço absoluto Newtoniano (e da "criação" de forças fictícias pelo mesmo) foi também examinada pelo físico alemão Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921), em quatro ocasiões (1905 e 1907-1912-1915). Anteriormente, vimos que as leis da Mecânica são invariantes por uma **transformação de Galileu** (para a qual o tempo e o espaço são absolutos), ou seja, que uma experiência mecânica é incapaz de determinar se um corpo está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. No entanto, quando o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) formalizou, em 1873, as leis do eletromagnetismo - as famosas **equacões de Maxwell**[21] - a questão que se colocou para os estudiosos dessas equações era a de saber se as mesmas eram invariantes por aquela transformação. Ao estudar essa invariância, verificou-se que existia então um referencial inercial privilegiado para as equações de Maxwell - o chamado **éter luminífero** - em relação ao qual a velocidade da luz apresentava um valor constante e finito **c**: 300 000 km/s. Esse resultado indicava que através de uma experiência eletromagnética era possível determinar se um corpo está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Contudo, em 1887, os norte-americanos, o físico Albert Abraham Michelson (1852-1931; PNF, 1907) e o químico Edward William Morley (1838-1923) realizaram uma célebre experiência na qual observaram que não existia um referencial inercial privilegiado para o eletromagnetismo.[22]

Por outro lado, a não-invariância das equações de Maxwell por uma transformação de Galileu indicava que as mesmas apresentavam uma assimetria, ou seja, elas se apresentavam diferentemente para referenciais em repouso e em movimento retilíneo uniforme, respectivamente. Assim, ao estudar essa assimetria, em 1905, Einstein formulou dois postulados: 1º - **Princípio da Relatividade** - "As leis pelas quais os sistemas físicos experimentam mudanças não são afetadas, se essas mudanças de estado são referidas a um ou outro de dois sistemas de coordenadas em movimento relativo uniforme"; 2º - **Constância da Velocidade da Luz** - "Qualquer raio de luz move-se em um sistema 'estacionário' de coordenadas com a velocidade determinada **c**, quer seja o raio emitido por um corpo estacionário ou em movimento".[23]

Tomando como base esses dois postulados, hoje conhecidos como **Princípios da Relativídade Restrita**, passou Einstein a determinar as transformações lineares (essa hipótese foi admitida em virtude das propriedades de homogeneidade do espaço e do tempo) compatíveis com tais postulados. Einstein observou então que tais transformações já haviam sido obtidas pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em 1904, hoje conhecidas como **transformações de Lorentz**:[24]

$$x' = \gamma(x + Vt);\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \gamma\left(t + \frac{Vx}{c^2}\right);$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2};\ \beta = \frac{V}{c}\ ,$$

no caso do eixo dos **x** do sistema de referência Oxyz, se deslocar com velocidade V paralelamente ao eixo dos **x'** do sistema de referência O'x'y'z'.

De posse dessas transformações, Einstein prosseguiu examinando o efeito que as mesmas provocam em corpos rígidos e em relógios em movimento, obtendo os seguintes resultados: **Contração do Espaço** - $L = L_0/\gamma$ significando que um bastão rígido de comprimento L_0 quando se desloca com uma velocidade **V** em relação a um observador em repouso, aparecerá a este, ter um comprimento menor L, já que $\gamma > 1$; **Dilatação do Tempo** - $\tau = \gamma\tau_0$ significando que o intervalo de tempo τ entre dois eventos, medido numa série de relógios sincronizados e em repouso, é maior que o intervalo de tempo τ_0 (chamado **tempo próprio**), entre esses mesmos eventos e medido por um observador solidário a um relógio que se desloca com velocidade **V** em relação ao conjunto de relógios referido anteriormente; **Matéria-Energia** - $E = mc^2$, que significa dizer que a massa **m** de um corpo é a medida de seu conteúdo de energia **E**.

Depois de examinar as questões referentes aos referenciais inerciais (através do que vimos acima e que hoje se conhece como **Teoria da Relatividade Restrita**), Einstein voltou-se para a tese central dessa Teoria: - "Nenhuma experiência física pode distinguir um sistema de referência inercial de um outro", isto é, a razão pela qual os referenciais inerciais eram privilegiados, conforme observara Mach em seus trabalhos sobre referenciais não-inerciais, segundo vimos anteriormente. Assim, influenciado por esses trabalhos, Einstein começou a admitir que todos os sistemas de referência - e não somente os referenciais inerciais - são equivalentes para a formulação das leis da Física. Então, em 1907, teve a idéia[25] ("a mais feliz de sua vida", segundo afirmou depois) de que um observador que cai em queda livre não pode dizer, observando objetos ao seu redor, que ele está em um campo de gravitação, e mais ainda, ele não sente seu próprio peso. Essa idéia foi formalizada por ele, em 1912, através do hoje famoso **Princípio da Equivalência**: - "Um sistema inercial de referência S, no qual há um campo de gravitação uniforme e no qual todas as partículas caem com uma aceleração constante - $\vec{g}$ é equivalente a um sistema S', não-inercial, uniformemente acelerado com aceleração $\vec{g}$, sem campo de gravitação". Essa equivalência (que significa considerar que: $m_I = mg$[26]), "é válida para todos os fenômenos físicos", postulou ainda Einstein.

Como esse Princípio da Equivalência só é válido para um campo de gravitação homogêneo numa pequena região do espaço, como construir a Teoria da Relatividade Geral que está ligada ao campo de gravitação não uniforme inevitável quando se considera um sistema acelerado arbitrário, indagou Einstein? Para responder a essa pergunta, começou examinando qual o tipo de variáveis de campo (estrutura) que caracterizaria o espaço físico, para essa Teoria. Ora, observou, na Teoria da Relatividade Restrita, para um sistema de coordenadas adequadamente escolhido, o espaço físico é caracterizado pela seguinte métrica: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$,[27] onde a matriz $\eta_{\mu\nu}(4\times 4)$ é dada por: $\eta_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$, $\eta_{\mu\nu} = 1$, se $\mu = \nu = 0$ e $\mu = \nu = 1, 2, 3$. No entanto, referida a um sistema arbitrário, essa métrica é expressa por: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde $g_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico real. Além do mais, continuou Einstein, se após realizar transformações no "campo livre" da Teoria da Relatividade Restrita as primeiras derivadas desse tensor não desaparecerem em relação às coordenadas,[28] existe um campo gravitacional com referência a esse sistema de coordenadas.

O próximo passo dado por Einstein em busca da Teoria Geral da Relatividade Geral foi o de encontrar equações covariantes que generalizassem a **equação de Poisson**[29] para o campo de gravitação de Newton $\phi(\vec{r})$: $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho_m(\vec{r})$, onde G é a constante de gravitação universal, $\rho_m(\vec{r})$ a densidade de massa, fonte de $\phi(\vec{r})$. Para encontrar tais equações (que representavam a Teoria Relativista do Campo Gravitacional), Einstein identificou esse campo com a métrica da geometria espaço-temporal de Riemann, geometria essa caracterizada pelo **tensor contraído de Riemann-Christofell** ou de **Ricci** $R_{\mu\nu}$ e pela curvatura $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. [30] Desse modo, Einstein observou que o lado esquerdo da equação de Poisson deveria ser substituído por uma combinação entre $R_{\mu\nu}$ e R, e o lado direito, o termo ρ_m deveria ser substituído por um tensor. Ora, continuou Einstein, "... uma vez que sabemos, segundo a Teoria da Relatividade Restrita, que a massa (inerte) é igual à energia, devemos colocar do lado direito o tensor de densidade energia - $T_{\mu\nu}$ - mais precisamente, de toda a densidade de energia que não pertence ao campo gravitacional puro". Assim, em 1915, Einstein apresentou sua célebre equação para o campo gravitacional:[31]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu},$$

onde **k** é a **constante de gravitação universal de Newton-Einstein**, dada por: $k = 8\pi G/c^2$.

Em continuação ao seu trabalho sobre os fundamentos da Teoria Geral da Relatividade, iniciado em 1915, conforme vimos acima, e concluído em 1916,[32] Einstein passou a verificar se sua equação era consistente com a experiência. Para isso ocorrer, observou, ela deveria conduzir, em primeira aproximação, à teoria da gravitação de Newton. Assim, considerando que a geometria euclicliana e a lei da constância da velocidade da luz são válidas, com uma certa aproximação, em regiões de grande extensão, como no sistema planetário, admitiu que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, característico da geometria riemaniana, era um pouco diferente de $\delta_{\mu\nu}$ característico da geometria euclidiana, isto é: $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$ onde os $\gamma_{\mu\nu}$ são tão pequenos comparados com 1 que podemos desprezar suas potências mais elevadas, bem como suas derivadas. Com essa aproximação, demonstrou que a componente temporal (γ_{44}) representa o papel do potencial gravitacional, uma vez que obteve as seguintes equações: $\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\tau}$ $(\tau = 1, 2, 3)$ e $\nabla^2\gamma_{44} = k\rho$. [33]

Notas e Referências Bibliográficas

1. Juntamente com esse paradoxo, Zenão de Eléia formulou mais outros três paradoxos (**dicotomia, flecha, Aquiles e a tartaruga**) com o objetivo de demonstrar que o movimento não existia. Para detalhes sobre e sses paradoxos, vejam-se: BOYER, C. B. 1968. *A History of Mathematics,* John Wiley and Sons; KLINE, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press.
2. KOYRÉ A. 1985. *Estudios Galileanos*, Siglo Veintiuno Editores; — 1982. *Estudos de História do Pensamento Científico*, Editora Universidade de Brasília e Forense-Universitária; LUCIE, P. 1977. *A Gênese do Método Científico*, Editora Campus.
3. Muito embora Galileu achasse que não era necessário realizar esse tipo de experiência - ele mesmo não a realizou -, a mesma foi efetuada por diversos pesquisadores. Por exemplo, por volta de 1624, o engenheiro francês Jean Gallé, a bordo de uma galera veneziana, no Mar Adriático, deixou cair uma massa de chumbo do alto de seu grande mastro e observou, então, que a mesma não caiu ao seu pé, e sim desviou-se em direção à popa. Por sua vez, em 1634, o físico francês Jean-Baptiste Morin (1583-1656) realizou uma experiência análoga a essa no rio Sena, contudo, observou que o corpo caia sempre no pé do mastro. Para detalhes sobre essas experiências e suas interpretações, veja-se: KOYRE (1982), op. cit.
4. O filósofo grego Aristóteles de Estagira (384-322) admitia que nosso planeta Terra era imóvel e, em vista disso, um corpo lançado para cima cairia sempre ao pé da vertical em que fora lançado. Porém, se a Terra estivesse em movimento, tal corpo deveria cair a oeste de sua posição inicial, advertia Aristóteles.
5. GALILEI, G. (s/d) *Duas Novas Ciências*, Ched Editorial, Istituto Italiano di Cultura e Nova Stella Editorial.

6. Esse princípio da independência dos movimentos de Giordano Bruno-Galileu foi corretamente utilizado pelo físico francês Pierre Gassendi (1592-1655) na explicação da experiência que realizou em Marselha, em 1641, com o patrocínio de Louis de Vallois, Conde de Allais (1596-1653), na qual estudou a queda (sempre na vertical) de um corpo do alto do mastro de uma galera em movimento. Essa experiência foi descrita por Gassendi em um texto intitulado *De Moto Impresso a Motore Translato*, editado em 1642. (KOYRÉ (1982), op. cit.)
7. As expressões: $x' = x + Vt; y' = y; z' = z; t' = t$, são hoje conhecidas como o grupo ou **transformação de Galileu**. (É oportuno registrar que na época de Galileu, a hipótese de que $t' = t$ era *ad hoc*.)
8. NEWTON, I. 1990. *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, Volume 1, Nova Stella/EDUSP.
9. NEWTON, op. cit.
10. NEWTON, op. cit.
11. Para essa dedução, veja-se: CATTANI, M. 1990. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Editora Edgard Blücher Ltda.
12. O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em *Correspondência com Clarke*, de 1715, criticou essa interpretação de Newton, ao afirmar que como o espaço só representa as posições possíveis de uma partícula, ele, portanto, não pode exercer uma ação física. Nova crítica a essa interpretação de Newton seria feita pelo físico e filósofo austríaco Ernst Mach (1838-1916), segundo veremos mais adiante. (LEIBNIZ, G. W. 1979. IN: *Os Pensadores*, Abril Cultural; LEITE LOPES, J. 1993. *Théorie Relativiste de la Gravitation*, Masson; PINGUELLI ROSA, L. 1988. IN: *300 anos dos 'Principía' de Newton,* COPPE.)
13. NEWTON, op. cit.
14. O físico holandês Christian Huyghens (1629-1695), em 1659, considerou que as **forças centrífugas** eram responsáveis pelos movimentos curvilíneos, e que estas variavam na razão direta do quadrado da velocidade e na razão inversa do raio. Mais tarde, em um trabalho que foi publicado após sua morte (*Opuscula Posthuma,* 1703), demonstrou que essa força depende, também do que chamou de **quantitates solidas**, ou seja, a massa **m** do corpo, conforme se verificou posteriormente. Contudo, Newton corrigiu Huygens ao substituir a força centrífuga pela força centrípeta como causa do movimento circular. (SEDGWICK, W. T., TYLER, H. M. e BIGELOW, R. P. 1950. *História da Ciência,* Editora Globo.)
15. TRUESDELL, C. 1968. *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag.
16. Em 1851, o físico francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) comprovou o efeito da **força de Coriolis** medindo a rotação da Terra. Para isso, suspendeu uma esfera de ferro de 30 kg do alto da cúpula dos *Invalides* em Paris por um fio de 67 m de comprimento (dispositivo esse mais tarde conhecido como **pêndulo de Foucault**), e observou que a cada movimento oscilatório da esfera, o plano de oscilação se desviava de um certo ângulo $\Delta\phi$ para cada lapso de tempo Δt. Com isso, calculou a velocidade angular da Terra: $w = \Delta\phi/\Delta t$. Para um estudo mais detalhado da força de Coriolis e seus efeitos, vejam-se, por exemplo, KIBBLE, T. W. 1970. *Mecânica Clássica*, Editora Polígono; NUSSENZVEIG, H. M. 1981. *Curso de Física Básica*, Volume 1. Editora Edgard Blücher Ltda; ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, Micropaedia, Volumes 3 e 4. The University of Chicago, 1988.
17. Para ver a demonstração dessa expressão, veja-se: SYMON, K. R. 1983. *Mecânica*, Editora Campus.
18. MACH, E. 1974. *The Science of Mechanics*, The Open Court Publishing Company.
19. Uma experiência desse tipo, empregando uma balança de torsão em lugar de um balde com água e tendo como massa giratória o volante de uma grande máquina, foi realizada em 1894-1896, pelos irmãos B. e J. Friedlander, sem êxito, já que o efeito sugerido por Mach não foi observado. (LOEDEL, E. 1955. *Física Relativista*, Editorial Kapelusz.)
20. Para um estudo crítico sobre o conceito de massa, veja-se: OKUN, L. B. 1989. *Physics Today*, June: 31.
21. Essas **equações de Maxwell** traduzem os fatos experimentais relacionados com as leis empíricas formuladas pelos físicos franceses Charles Augus-

tin Coulomb (1736-1806), em 1785, e André Marie Ampère (1775-1836), em 1820, e o inglês Michael Faraday (1791-1867), em 1831. Para detalhes históricos sobre essas leis, veja-se: WHITTAKER, Sir E. 1951. *A History of the Theoríes of Aether and Electricity: The Classical Theories*, Thomas Nelson and Sons, Ltd.

22. Para detalhes históricos dessa famosa **experiência de Michelson-Morley**, veja-se: JAFFE, B. 1967. *Michelson e a Velocidade da Luz*, EDART - Livraria Editora Ltda.
23. Para detalhes sobre a obra e vida de Einstein, vejam-se os excelentes textos: PAIS, A. 1982. *'Subtle is the Lord... ' The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press; PATY, M. 1993. *Einstein Philosophe*, Presses Universitaires de France. Para detalhes técnicos do trabalho de Einstein, veja-se: EINSTEIN, A. 1952. *The Principle of Relativity*, Dover Publications. Inc.
24. Parece haver sido o físico alemão Woldemar Voigt (1850-1919) o primeiro a encontrar, em 1887, as equações de transformações entre os sistemas O e O' e que substituiam as transformações de Galileu. Essas mesmas transformações foram também obtidas, independentemente, pelo físico e matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), em 1900. (LEITE LOPES, op. cit.; OKUN, op. cit.)
25. Para uma descrição sobre como as idéias físicas surgiram a Einstein, veja-se: EINSTEIN, A. 1982. *Notas Autobiográficas*, Editora Nova Fronteira.
26. Esses dois tipos de massa (**massa de inércia** m_I **e massa gravitacional** m_g) decorrem, respectivamente, da Segunda Lei de Newton (na notação atual): $\vec{F} = m_I\vec{a}$ e da Lei da Gravitação de Newton (também na notação atual): $\vec{F}_{AB} = G\frac{m_{gA}m_{gB}}{r^3_{AB}}\vec{r}_{AB}$. Observe-se que Newton foi um dos primeiros a tentar, sem sucesso, relacionar essas duas massas através de experiências com pêndulos de mesmo comprimento, mas de materiais diferentes, uma vez que o período de um pêndulo simples é proporcional à $\sqrt{m_I/m_g}$. Uma outra tentativa nesse sentido foi realizada pelo matemático alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), em 1830. Por fim, em 1889-1890, o físico húngaro Roland (Lorand), Barão Eötvös von Vásárosnamélly (1848-1919) ao usar uma espécie de balança de torsão, encontrou para a variação relativa entre m_I e m_g de vários materiais (latão, vidro e cortiça), não mais que 5 partes em 10^9. Outras medidas dessa relação foram feitas por Eötvös, D. Pékar e E. Fekete, em 1909 (e somente publicada em 1922); bem como por J. Renner, em 1935; por P. G. Roll, R. Krotkov e R. H. Dicke, em 1964; e por V. B. Braginskii e V. I. Panov, em 1972. Nesta última, o valor encontrado foi $< 10^{-12}$. (WEINBERG, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons; MISNER, C. W., THORNE, K. S. and WHEELER, J. A. 1973. *Gravitation*, W. H. Freeman and Company; PAIS, op. cit.; PATY, op. cit.)
27. Nessa expressão (e nas demais equivalentes que se seguem), estaremos usando a **Convenção de Einstein**: - "Se num monômio aparecer repetido um índice, ficará subentendida uma soma relativamente a esse índice". Portanto, essa expressão tem o seguinte significado: $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.
28. Para ver a dependência de $g_{\mu\nu}$ com as coordenadas de um sistema de referência não-inercial, vamos estudar o caso de um sistema S'(x',y',z') em rotação uniforme ($\vec{\omega}$ = constante) em torno dos eixo dos **z,z'** de um sistema inercial S (x,y,z), isto é: $x' = xcos(\omega t) + ysen(\omega t)$; $y' = xsen(\omega t) - ycos(\omega t)$; $z' = z$. Neste caso, a métrica dada por $ds^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu$ toma a forma (com $x^0 = ct$): $ds^2 = [1-\frac{\omega^2}{c^2}(x'^2-y'^2)](dx^0)^2-(d\vec{r})^2+2\frac{\omega}{c}(x'dy'-y'dx')dx^0$, o que mostra a clara dependência de $g_{\mu\nu}$ com as coordenadas, uma vez que temos: $g_{00} = 1 - \frac{\omega^2}{c^2}(x'^2 - y'^2)$; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$; $g_{01} = -2\frac{\omega}{c}y'$; $g_{02} = +2\frac{\omega}{c}x'$; e os demais componentes do tensor métrico são nulos. (LEITE LOPES, op. cit.)
29. Essa equação foi obtida pelo matemático francês Siméon-Denis Poisson (1781-1840), em 1813, com o objetivo de estudar os potenciais gravitacionais $\phi(\vec{r})$ no interior dos próprios corpos geradores desse potencial, uma vez que tal tratamento não havia sido feito pelo matemático e astrônomo francês Pierre Simon Laplace (1749-

1827) em seu estudo a respeito da atração gravitacional de corpos elipsoidais, em 1799, ocasião em que apresentou sua célebre equação: $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$. (KLINE,op.cit.)

30. O matemático grego Euclides de Alexandria (323-285) em seu livro *Elementos de Geometria* apresentou o seguinte postulado (mais tarde, assim enunciado): 5^o - "Por um ponto fora de uma reta só se pode traçar uma e somente uma paralela à mesma". Contudo, em 1826, o matemático russo Nikolay Ivanovich Lobachevski (1798-1856) e, independentemente, em 1832, o matemático húngaro Janos Bólyai (1802-1860) formularam a chamada **geometria hiperbólica**, baseada no postulado: - "Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma infinidade de paralelas à mesma. Por outro lado, com o objetivo de estudar os fundamentos da geometria, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), em 1854 (no trabalho que apresentou para o concurso de **Livre Docente** da Universidade de Göttingen), chegou ao conceito de **geometria esférica,** ao propor que o 5^o postulado de Euclides teria o seguinte enunciado: -"Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar nenhuma paralela à mesma". Ainda nesse trabalho (que foi publicado apenas em 1868) Riemann estudou os conceitos de menor distância entre dois pontos (**geodésica**) e de **curvatura** (este conceito havia sido introduzido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em 1799) em uma variedade diferencial, hoje conhecida como **variedade riemanniana.** Para o cálculo da geodésica, Riemann considerou que $\delta(\int ds) = 0$, onde $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ e, com auxílio do Cálculo das Variações, obteve a seguinte equação para a geodésica: $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$ onde $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ é o **símbolo de Christoffel,** introduzido em 1869 pelo matemático alemão Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), em seu estudo sobre as variedades riemanianas, e é calculado através das derivadas do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Ainda nesse seu estudo, Christoffel tratou também do tensor curvatura, hoje conhecido como **tensor de Riemann-Christoffel,** dado por: $R_{\lambda\eta\nu\mu} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\eta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\eta\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\eta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\eta\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\right] + g_{\tau\alpha}[\Gamma^\tau_{\eta\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \Gamma^\tau_{\eta,\nu}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}]$. É oportuno dizer que a notação tensorial vista acima, só foi introduzida pelos matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e seu pupilo Tullio Levi-Civita (1873-1941), em trabalhos realizados entre 1887 e 1901, respectivamente, com os quais desenvolveram o Cálculo Tensorial. (KLINE, op. cit.; LEITE LOPES, op. cit.; WEINBERG, op. cit.)

31. A combinação entre o tensor $R_{\mu\nu}$ e a curvatura R, isto é: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, - o famoso **tensor de Ricci-Einstein** - foi buscada por Einstein com o objetivo de garantir que sua divergência covariante fosse nula, ou seja: $D_\nu G^{\mu\nu} = 0$ e, com isso, fosse também obdecida a lei de conservacão da energia-momentum, sendo esta representada pelo tensor $T_{\mu\nu}$. É oportuno esclarecer que o conceito de **derivada covariante** ou **derivada absoluta** foi introduzido por Ricci, em 1887, e é definido (para o caso de um vetor contravariante A^α) por: $D_\nu A^\alpha \equiv A^\alpha{}_{;\nu} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A^\mu$. No caso de um vetor covariante, o segundo termo é negativo. Para tensores de ordem mais alta, além do primeiro termo correspondente à derivada parcial, os demais termos envolvem somas ou diferenças envolvendo produtos dos símbolos de Christoffel. (KLINE, op. cit., LEITE LOPES, op. cit.; WEINBERG, op. cit.)

32. EINSTEIN, A. 1916. *Annalen der Physik, 49*: 769-822; — 1958. *O Significado da Relatividade*, Arménio Amado, Editor, Coimbra.

33. Para um estudo atual da Teoria Geral da Relatividade, vejam-se: DIRAC, P. A. M. 1975. *General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons; LEITE LOPES, op. cit.; WEINB ERG, op. cit .