Discutindo os conceitos de erro e incerteza a partir da tábua de Galton com estudantes de graduação: Uma contribuição para a incorporação de novas abordagens da metrologia ao ensino de Física superior

Discussing the concepts of error and uncertainty with undergraduate students through means of the Galton box: A contribution to incorporate new metrological approaches to Physics teaching

Submetido ao CBEF

Paulo Lima Junior
Laboratórios de Ensino de Física - Instituto de Física - UFRGS
paulolima@ufrgs.br

Fernando Lang da Silveira
Instituto de Física - UFRGS
lang@if.ufrgs.br

Resumo: Até a publicação do Guia para Expressão da Incerteza da Medição (GUM), a questão dos erros e incertezas não estava bem resolvida. Neste artigo, discutimos os conceitos de erro e incerteza segundo as diretrizes mais atuais do campo da metrologia, sugerindo uma maneira de introduzir tais conceitos para estudantes de graduação, fazendo uso da tábua de Galton ou Quincunx como recurso didático. A tábua de Galton também é usada para introduzir o Teorema Central do Limite, explicitando a importância deste teorema na elaboração de intervalos de cobertura e para a interpretação das incertezas.

Palavras-chave: Erro, Incerteza, Metrologia, Atividades Experimentais.

Abstract: Until the publication of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), the question of errors and uncertainties was not well resolved. In this paper, we discuss the concepts of error and uncertainty, according to the latest guidelines of the field of metrology, and suggest a way to introduce such concepts to undergraduate students through means of the Galton box (also called Quincunx) as a teaching tool. The Galton box is also used to introduce the Central Limit Theorem, emphasizing the importance of this theorem in the development of coverage invervals and for the interpretation of uncertainties.

Keywords: Error, Uncertainty, Metrology, Laboratory Activities.

1. Introdução

Metrologia é a ciência da medição. Ela envolve todas as questões teóricas e práticas implicadas nos procedimentos de medição de grandezas em diversas atividades acadêmicas e profissionais tais como o controle de qualidade dos produtos e insumos industriais, a condução de pesquisa básica, a produção de novas tecnologias, o desenvolvimento e a calibração de padrões de medida (JCGM, 2008a). Por essa razão a metrologia constitui um elemento fundamental na formação básica de profissionais das áreas de tecnologia e ciência experimental, dentre os quais se encontram os futuros bacharéis e licenciados em Física.

A confiabilidade dos resultados das medições é uma questão crítica no campo da metrologia e tem sido abordada sob os conceitos de erro e incerteza. Antes da elaboração e da publicação do Guia para Expressão da Incerteza da Medição (GUM) (JCGM, 2008a) e do Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) (JCGM, 2008b), documentos elaborados por representantes das sete organizações internacionais mais eminentes do campo da metrologia[1] na década de 1990, não havia um vocabulário e um conjunto de procedimentos padronizados e amplamente aceitos que permitissem avaliar e expressar de maneira consistente a confiabilidade dos resultados de medição.

No âmbito da educação científica, alguns trabalhos buscaram esclarecer aspectos dos novos procedimentos e do novo vocabulário da metrologia do GUM e do VIM (CRUZ et al., 2009, VUOLO, 1999), incorporando-os ao ensino de Física (BUFFLER et al., 2008, SIEGEL, 2007). Uma dificuldade típica das tentativas de incorporação dessas novas diretrizes às disciplinas introdutórias de Física experimental está em superar as concepções e a linguagem na qual a maioria dos professores teve formação e que foram alteradas pelo Guia para expressão da incerteza da medição.

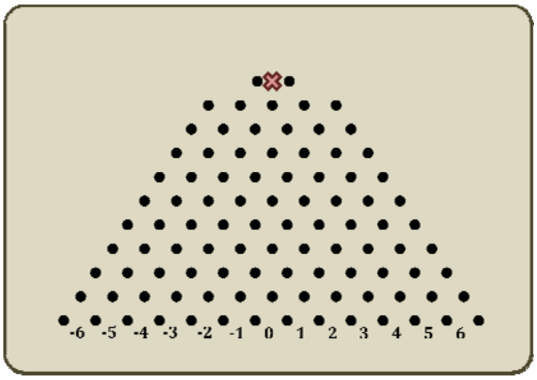
Neste artigo, abordamos especificamente os conceitos de erro e incerteza segundo o GUM e o VIM, usando também a tábua de Galton como dispositivo didático para a introdução desses conceitos em disciplinas de Física básica experimental.

2. Tábua de Galton ou Qincunx

A tábua de Galton ou Quincunx (Hacking, 1991) é um dispositivo muito simples, idealizado pelo famoso cientista sir Francis Galton (1822-1911), que consiste de uma placa com pregos fixados em posições alternadas e em fileiras eqüidistantes conforme mostra a figura 1. A tábua é inclinada de tal forma que uma esfera, inicialmente em repouso, possa se deslocar por gravidade desde a parte superior (identificada por uma cruz na figura 1) até a base, onde os espaços entre dois pregos contíguos estão indexados com números reais, inteiros.

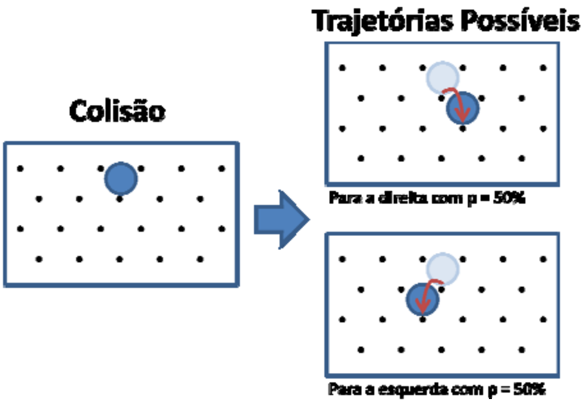
[1] BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), IEC (International Electrotechnical Commission), IFCC (International Federation of Clinical Chemistry), ISO (International Organization for Standardization), IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry), IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) e OIML (International Orgnization of Legal Metrology).

Figura 1. Tábua de Galton ou Quincunx.



Na tábua de Galton que idealizamos e construímos, os pregos estão posicionados formando triângulos eqüiláteros. O espaço entre quaisquer dois pregos contíguos é de 12,5 mm. Essas dimensões garantem que uma esfera de aço de 12,0 mm (facilmente encontrada no mercado) percorra a tábua da seguinte maneira: ao colidir frontalmente com um prego, a esfera dirige sua próxima colisão frontal *necessariamente* e com a *mesma probabilidade* a um dos dois pregos que, na fileira inferior, encontram-se mais próximos do prego anterior (veja figura 2). Conforme será demonstrado adiante, essas condições permitem criar um modelo probabilístico muito especial para a corrida da esfera na tábua de Galton.

Figura 2. Representação das duas únicas trajetórias possíveis após cada colisão no Quincunx construído



Desta forma, o nosso Quincunx deve operar de maneira análoga ao clássico problema do andar do bêbado (Mlodinov, 2009) que, em uma calçada, tem igual probabilidade de dar um passo à direta ou à esquerda. Assim, a cada prego que encontra, admite-se que a esfera tem igual probabilidade de desviar-se para um lado ou outro, colidindo necessariamente com um dos dois pregos contíguos da fileira imediatamente abaixo. Como é possível perceber na figura 1, uma corrida da esfera através de todas as fileiras é análoga ao problema unidimensional do andar do bêbado que dá sempre 10 passos com ½ unidade de comprimento cada.

Se o diâmetro da esfera for muito diferente da distância entre os pregos, ela poderá se comportar de maneira diversa da admitida, saltando mais de um espaço após uma colisão (tal soe acontecer em muitas tábuas de Galton apresentadas na *web*) ou ficando presa entre uma fileira de pregos e outra. Assim, apesar da simplicidade aparente, a nossa tábua de Galton requereu uma manufatura bastante cuidadosa de modo a assegurar o pressuposto de eqüiprobabilidade - à direita ou à esquerda de um prego, no espaço contíguo - para cada uma das colisões da esfera.

Considera-se como resultado do lançamento, ao final de uma corrida da esfera, o local entre dois pregos que a esfera atinge, identificado por número inteiro, na fileira inferior, conforme a figura 1. Este resultado é a posição x, constituindo-se em uma variável discreta que pode assumir um número inteiro desde -5 até 5. Então x constitui-se em uma variável aleatória dada pela seguinte expressão:

$$x = X + E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_{10} \tag{1}$$

Na expressão (1) X é posição inicial da esfera (na nossa tábua X é igual a zero por construção), E_i é resultado do i-ésimo passo (podendo valer ½ ou -½ com igual probabilidade). Por conter 10 passos o Qincunx por nós construído determina que a posição final x é sempre um número inteiro conforme notado anteriormente (a menos de uma falha eventual ou defeito de fabricação, as posições finais -6 e $+6$ jamais ocorrerão). Como cada passo pode ser considerado independente dos anteriores, é esperado que eles (quase) se cancelem uns aos outros, determinando que os resultados finais estejam centrados em $x = 0$, com probabilidade decrescente conforme se afastem da posição zero.

A tábua de Galton se constitui em um dispositivo singelo, de fácil compreensão, que concretiza um sistema estritamente probabilista. Cada resultado possível é apenas previsível em probabilidade! A distribuição de probabilidades do resultado final será apresentada adiante.

Muitos pensadores já se valeram do Quincunx na exemplificação de um mundo probabilista. O filósofo da ciência Karl Popper dedica atenção especial a ele *"porque pode servir como um modelo extremamente simples de um mundo probabilístico"* (Popper, 1989; p. 100). Jean Piaget, em seus estudos sobre a gênese da idéia do acaso, usou concretamente a tábua de Galton em entrevistas clínicas, verificando que crianças com idade de 12 anos já apresentam a *"compreensão do papel dos grandes números na regularidade das distribuições"* (Piaget e Inhelder, 1974; p. 52). Desta forma, cremos que o Quincunx pode ter grande valor pedagógico na introdução dos conceitos de metrologia para os alunos em disciplinas iniciais de física experimental.

3. Diferenças entre erro e incerteza

O Guia para Expressão da Incerteza da Medição (GUM) e o Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) delimitam de maneira muito consistente as fronteiras entre os conceitos de erro e incerteza. Evidentemente não é fundamental que os alunos compreendam essa demarcação em todos os seus detalhes, mas é preciso que o professor conheça o novo vocabulário internacional para evitar em sala de aula usos que são contraditórios com a nova linguagem internacional. Doravante espera-se que a maioria dos materiais didáticos produzidos incorpore a nova terminologia.

3.1. Definições de erro e incerteza

Por definição erro é a diferença entre o valor obtido no processo de medição e o *valor verdadeiro* da grandeza medida (JCGM, 2008b). Assim, o conceito de erro supõe que ao mensurando possa ser atribuído um valor verdadeiro, bem definido. Entretanto em algumas situações práticas a existência de tal valor verdadeiro não tem sentido, podendo às vezes se constituir em uma idealização.

Por exemplo, embora a aceleração de queda livre seja usualmente considerada uma constante para cada posição na superfície da Terra, ela varia ao longo do dia devido aos efeitos de maré solar e lunar (SILVEIRA, 2003). Como essas variações são muito pequenas (menores do que uma parte por milhão), podemos desprezá-las para quase todos os propósitos de pesquisa e ensino e, então, considerar que a aceleração de queda livre tenha um valor local bem definido. Ou seja, para decidir se podemos atribuir a um mensurando um valor verdadeiro é necessário levar em consideração (além da própria natureza do fenômeno em questão) o propósito do processo de medição e o grau de sofisticação e precisão da medida.

Como outro exemplo, podemos citar a necessidade de monitorar a tensão elétrica em residências e indústrias com fins de controlar e avaliar a qualidade do fornecimento de energia elétrica. Esse propósito, por si mesmo, presume que não sejam desprezadas as variações da tensão elétrica ao longo do dia, ou da semana, ou de outro intervalo de tempo de interesse. Por isso, não faz sentido referir um valor verdadeiro da tensão elétrica fornecida a este ou àquele consumidor, existindo de fato um *conjunto de valores verdadeiros* distribuídos em torno de um valor nominal (por exemplo, 127 V ou 220 V). Essa distribuição de valores será representada por uma estatística de tendência central (por exemplo, seu valor médio no intervalo de tempo de interesse, ou ainda a sua mediana) e uma medida de dispersão ou variabilidade (por exemplo, sua variância ou desvio padrão ou ainda seus valores extremos) ou até por uma função distribuição de freqüências. De qualquer maneira, neste tipo de situação em que não há um valor verdadeiro bem definido, mas um conjunto de valores verdadeiros, não se define erro de medição (JCGM, 2008b).

A incerteza, por sua vez, é um parâmetro que expressa quantitativamente a qualidade do resultado da medição (JCGM, 2008a). Ela é um parâmetro não-negativo que caracteriza a dispersão dos valores que razoavelmente podem ser atribuídos ao mensurando (JCGM, 2008b). Quanto maior for essa dispersão, menos confiável será o resultado da medição. Por isso, a incerteza pode ser considerada uma medida da dúvida racional que se tem no valor experimentalmente atribuído a uma grandeza (JCGM, 2008a).

A incerteza pode ser expressa de duas maneiras: (1) como desvio padrão, ela é chamada incerteza padrão; e (2) como um múltiplo de desvio padrão, ela é chamada incerteza expandida. Nos dois casos, ela é uma medida da dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.

No caso particular (freqüentemente satisfeito em laboratórios didáticos) em que podemos atribuir um valor verdadeiro ao mensurando, a incerteza padrão pode ser interpretada como o desvio padrão da variável erro em uma série de observações realizadas sob as mesmas condições. No caso mais geral em que há um conjunto de valores verdadeiros, a incerteza padrão pode ser interpretada como o desvio padrão que caracteriza a distribuição dos resultados de medição em torno da média do conjunto de valores verdadeiros assumidos pelo mensurando.

Independente de ser possível falar em valor verdadeiro e erro, toda a determinação experimental de grandezas físicas possui alguma incerteza associada. De fato, como é possível perceber, a definição de incerteza não depende do conceito de valor verdadeiro e mesmo uma grandeza que não possua valor verdadeiro bem definido, mas um conjunto de valores verdadeiros, pode ter sua incerteza avaliada sem dificuldades.

3.2. Como são calculados o erro e a incerteza de uma medida

Como, por definição, erro é a diferença entre o valor obtido no processo de medição e o valor verdadeiro do mensurando[2], decorre que o erro é uma quantidade, ora positiva ou ora negativa. A avaliação do erro de uma medida depende, portanto, do conhecimento prévio sobre o valor do mensurando.

Por exemplo, desde 1983 a velocidade da luz no vácuo é, por definição, igual a 299.792.458 m/s. Assim, ao final de qualquer medição que tenha por objetivo determinar a velocidade da luz no vácuo, podemos subtrair o resultado obtido experimentalmente do valor conhecido por definição. O resultado dessa operação (ora positivo, ora negativo) é o valor exato do erro da medição.

Há, porém, algumas circunstâncias em que o erro da medição pode ser conhecido aproximadamente. Por exemplo, é comum encontrar na literatura medidas de constantes da natureza muito mais precisas e confiáveis do que aquelas produzidas em laboratórios didáticos. Exemplificando, quando se obtém com uma balança didática de Cavendish um valor para a constante da gravitação universal, a diferença entre este valor e o valor referido na literatura pode ser considerado uma boa aproximação para o erro dessa medida. Em qualquer caso, para que seja possível avaliar o erro de uma medição, é necessário se ter alguma informação sobre o valor do mensurando com precisão superior àquela da medição em pauta.

A incerteza, por sua vez, dispensa esse tipo de informação prévia. Ela pode ser avaliada a partir da análise estatística de uma série observações (por exemplo, calculando-se o desvio padrão da média de observações repetidas aproximadamente sob as mesmas condições) ou por outros métodos (JCGM, 2008a). Em todo o caso, é possível que o

[2] A rigor, a expressão “valor verdadeiro do mensurando” é redundante uma vez que “o valor do mensurando” é sempre seu valor verdadeiro. Entretanto, ainda que redundante, utilizaremos essa expressão eventualmente para enfatizar o conceito de valor verdadeiro.

resultado da avaliação da incerteza seja expresso e interpretado como um desvio padrão e, por essa razão, a incerteza jamais será uma quantidade negativa.

3.3. A decomposição do erro e da incerteza

Uma questão central para a discussão de erros e incertezas em atividades experimentais de Física é a decomposição do erro em componentes que representam a contribuição de cada fonte de erro e a decomposição da incerteza em parcelas que correspondem às contribuições de cada fonte de variabilidade na medição efetivada. Devido a características que decorrem das definições de erro e incerteza, essas duas quantidades se decompõem de maneiras significativamente distintas.

É possível assumir que o erro total E é o somatório dos erros E_i provenientes de diversas fontes, de acordo com a seguinte expressão:

$$E = E_{fonte1} + E_{fonte2} + E_{fonte3} + \cdots \qquad (2)$$

Considere, por exemplo, o caso em que se deseja determinar a aceleração de queda livre com um pêndulo simples, uma trena e um cronômetro acionado manualmente. Nesse caso o tempo de reação do operador do cronômetro, a imprecisão da posição inicial e final do movimento de oscilação do pêndulo, o posicionamento da trena para avaliar o comprimento do pêndulo, o erro de calibração da trena e outros fatores contribuem (ora para mais, ora para menos) para a variabilidade do resultado da medição em torno do valor verdadeiro da aceleração de queda livre local (supondo que tal valor exista).

Observe que, devido à definição de erro, o conceito de erro aleatório, tal como ocorre em manuais mais antigos de técnicas de análise de dados experimentais, jamais será empregado para designar o desvio padrão da média de uma série de observações. O desvio padrão da média, parâmetro sempre positivo, é uma medida da incerteza e não do erro aleatório. Segundo o VIM (JCGM, 2008b), erro aleatório é a parcela do erro que varia de maneira imprevisível entre uma medição e outra. Ele pode ser atribuído à relação da grandeza que estamos medindo com outras grandezas que não conseguimos ou não desejamos controlar experimentalmente (e, portanto, estão variando) ou ainda pode representar uma parcela intrinsecamente estocástica, isto é, não sujeita a possíveis controles. Assim, o erro aleatório sempre pode ser positivo ou negativo.

Como a incerteza sempre pode ser expressa e interpretada como um desvio padrão, ou como um múltiplo do desvio padrão, é necessário que as incertezas se somem sempre aos quadrados[3]. Com efeito, se u_i representa o desvio padrão da parcela de erro correspondente á i-ésima fonte de erro, e se as diversas parcelas de erro são quantidades não correlacionadas, com qualquer distribuição, é possível deduzir que a incerteza total u deve ser dada por

[3] Um teorema absolutamente geral (Nunnaly, 1978) afirma que o quadrado do desvio padrão (variância) de uma variável aleatória compósita (isto é, que resulta da soma de variáveis aleatórias) é a soma dos quadrados dos desvios padrão das componentes se as componentes forem estatisticamente independentes ou apresentarem covariâncias nulas.

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots. \quad (3)$$

Assim, enquanto erros são simplesmente somados para se obter o erro total, as diversas incertezas são elevadas ao quadrado e somadas, obtendo-se no final o quadrado da incerteza total.

3.4. Uso prático dos conceitos de erro e incerteza

Como é possível perceber, o conceito de erro é muito mais restrito do que o conceito de incerteza. Para que se possa definir erro de medição é necessário definir valor verdadeiro. Nos casos em que não podemos pressupor a existência de tal valor, não faz sentido evocar o conceito de erro. Além disso, o erro é uma quantidade freqüentemente não calculada, pois seu cálculo, ainda que aproximado, exige conhecimento prévio do valor do mensurando. Freqüentemente, o valor (verdadeiro) do mensurando é aquilo que desejamos estimar no processo de medição e não é conhecido de antemão.

Porém, o conceito de erro é muito importante para dar consistência à teoria da medição. A hipótese de que o erro se decompõe em parcelas estatisticamente independentes que se somam contribuindo, ora para mais, ora para menos, nos resultados de medição é fundamental para justificar a adoção de um pressuposto muito usual em análise de dados experimentais: que as medidas de boa parte das grandezas físicas variam segundo uma distribuição aproximadamente normal ou gaussiana. Esse pressuposto será discutido mais adiante neste artigo a partir da tábua de Galton.

O conceito de incerteza, por sua vez, é mais abrangente. Ele não depende de se conhecer o valor do mensurando. A rigor, tal valor pode não existir e mesmo assim será possível avaliar a incerteza da medição. Enfim, a incerteza é a expressão mais apropriada e universal da qualidade do resultado de uma medição.

O quadro 1 resume a comparação entre os conceitos de erro e incerteza.

Quadro 1. Comparação entre conceitos de erro e de incerteza segundo o novo vocabulário internacional de metrologia.

	Erro	**Incerteza**
Definição	É a diferença entre o resultado obtido em uma medição e seu valor verdadeiro.	É um parâmetro que permite avaliar quantitativamente a confiabilidade do resultado de uma medição.
Como se obtém?	O erro é obtido pela diferença entre o resultado da medição e o seu valor verdadeiro. Portanto, pode ser positivo ou negativo.	A incerteza pode ser obtida por procedimentos estatísticos ou não, mas sempre poderá ser interpretada como um desvio padrão. Portanto, é sempre um parâmetro positivo.
O que é necessário para obtê-lo?	É necessário saber (ou ter uma boa estimativa) do valor verdadeiro para estimar o erro de uma medida.	Não é necessário saber o valor verdadeiro para estimar a incerteza do resultado de uma medição.

Como se decompõe?	O erro se decompõe linearmente nas diversas fontes de erro: $E = E_{fonte1} + E_{fonte2} + \cdots$ Existem várias componentes de erro porque existem várias fontes de erro. Observa-se que, nesta definição, o conceito de erro aleatório jamais será empregado como referência ao desvio padrão de uma série de observações!	A incerteza pode ser interpretada como um desvio padrão. O quadrado da incerteza total se decompõe em uma soma de quadrados, caso as incertezas parciais sejam estatisticamente independentes: $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots$ De maneira análoga ao erro, a incerteza pode ser expressa em componentes atribuídas a diversas fontes de variabilidade.
Qual é seu uso prático?	O conceito de erro tem mais importância teórica do que prática.	É a maneira adequada de avaliar a confiabilidade do resultado de uma medição.

4. Erro e incerteza na tábua de Galton

Como já foi antecipado, é possível relacionar a tábua de Galton aos processos de medição em geral, identificando nela os conceitos de erro e incerteza. Além disso, é possível argumentar, a partir desse dispositivo didático, que a média de cada grandeza medida em laboratório flutua aproximadamente segundo uma distribuição estatística conhecida: a distribuição normal ou de Gauss.

Enfim, partindo dessas informações, será possível interpretar a incerteza da medição construindo intervalos de cobertura – intervalos que, com alguma probabilidade, contêm o valor verdadeiro do mensurando ou a média dos valores verdadeiros, conforme o caso. Com tudo isso, será possível perceber que a tábua de Galton possui grande valor para introduzir conceitos de metrologia nos laboratórios de Física básica.

4.1. Analogia da tábua de Galton com o processo de medição

De um modo geral podemos supor para as medições realizadas em laboratórios didáticos que o resultado obtido (x) é igual a um valor verdadeiro (X) somado a um erro ou ruído (E) conforme a expressão a seguir:

$$x = X + E \tag{4}$$

Adicionalmente podemos considerar que, na maioria dos experimentos, existem várias fontes de erro. Ou seja, há diversas fontes de variabilidade no processo de medição que contribuem para que o resultado obtido seja diferente do valor alvo. Assim, o erro total pode ser decomposto em parcelas menores e que essas componentes de erro são produzidas por fontes relativamente independentes (por exemplo, tempo de reação do operador, variação no posicionamento do instrumento de medida, subjetividade na leitura de escalas analógicas...). Assim,

$$x = X + E_{fonte1} + E_{fonte2} + E_{fonte3} + \cdots . \tag{5}$$

Como é possível perceber, essa situação é análoga ao que ocorre na corrida de uma esfera na tábua de Galton. Nesse caso, podemos imaginar que cada fileira de pregos representa uma fonte de erro, desviando a esfera para a direita ou para a esquerda em relação a sua posição anterior, contribuindo desta forma com uma parcela para o erro total. O resultado de um percurso da esfera através de todas as fileiras de pregos representa, portanto, a posição inicial (aqui entendida como a posição verdadeira) acrescida do erro resultante de todas as fontes de erro envolvidas na medição.

4.2. A distribuição normal ou de Gauss

Segundo o Teorema Central do Limite (VENTSEL, H., 1973, p. 291-295; VUOLO, 1996, p.213-215), quando variáveis estatisticamente independentes, com variâncias semelhantes, se somam para produzir uma nova variável (tal como ocorre na soma das componentes de erro para produzir o erro total), essa nova variável tem distribuição tendendo à distribuição normal ou gaussiana[4] quando o número de componentes cresce.

Embora exista uma dedução formal para o Teorema Central do Limite (por exemplo, VENTSEL, H., 1973), a tábua de Galton permite introduzi-lo de maneira informal e didática para o estudante graduação. Na tabela 1 encontram-se as freqüências relativas para 922 resultados de lançamentos na tábua. O gráfico 1 é o histograma desses resultados. A rigor, a distribuição que melhor descreve a probabilidade $P(x)$ de ocorrência de cada resultado é uma distribuição multinomial dada por

$$P(x = n - 5) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^N \ . \qquad (6)$$

Na expressão (6), dado que o espalhamento da bolinha a cada colisão com um prego tem a mesma chance de ocorrer à esquerda ou à direita, então $p = 0{,}5$. $N = 10$ expressa o número total de colisões da bolinha para chegar à última fileira de pinos e $x = n - 5$ representa a posição final do lançamento (resultando em uma variável inteira e discreta com valores extremos de -5 e $+5$ conforme a figura 1). Entretanto, como é possível perceber a partir da curva normal ajustada ao histograma do gráfico 1, a distribuição de Gauss adere com excelente aproximação aos resultados da nossa tábua de Galton. Adicionalmente, a diferença entre as freqüências relativas obtidas e as probabilidades previstas por (6) estão dentro da faixa de terem ocorrido por acaso, pois um teste de significância a partir da estatística Qui-Quadrado (SPIEGEL, 1974) resultou em $\chi^2 = 12{,}5$ (nível de significância: 0,13).

---

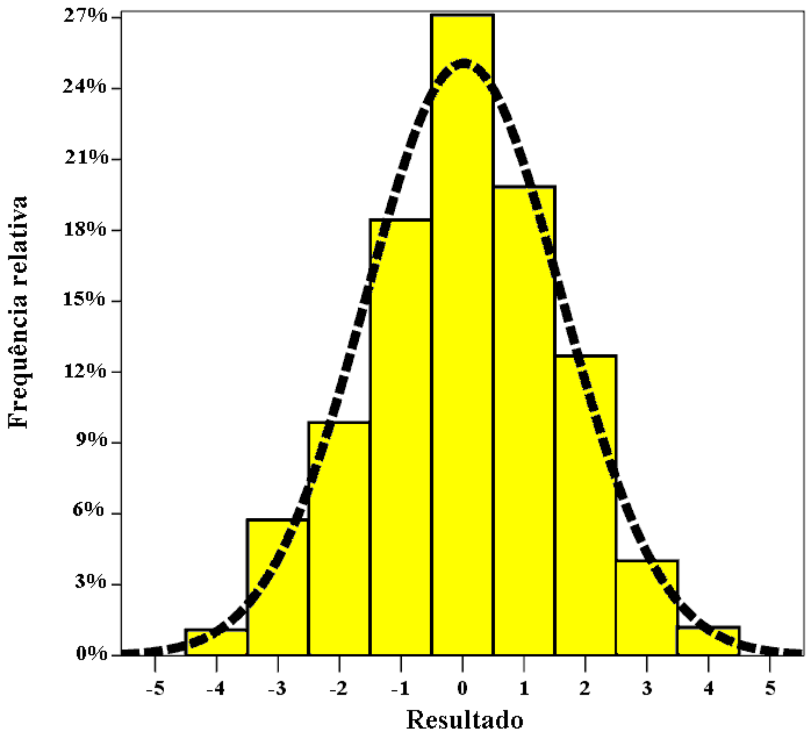
[4] A rigor, o Teorema Central do Limite afirma que, quando um número virtualmente infinito de variáveis não correlacionadas, com a mesma distribuição, é somado para produzir $y = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N$, a variável y resultante possuirá distribuição normal ou gaussiana. Por isso, quando existem várias fontes de erro, é lícito admitir *a priori* (portanto, antes de se fazer qualquer medida) que estamos lidando com uma variável com distribuição aproximadamente normal.

Tabela 1. Tabela das freqüências: resultados nos lançamentos em uma tábua de Galton.

Resultado *x*	Freqüência Observada	Freqüência Relativa Observada	Probabilidade da distribuição multinomial
-5	0	0,00%	0,10%
-4	10	1,08%	0,98%
-3	53	5,75%	4,39%
-2	91	9,87%	11,72%
-1	170	18,44%	20,51%
-0	250	27,11%	24,61%
1	183	19,85%	20,51%
2	117	12,69%	11,72%
3	37	4,01%	4,39%
4	11	1,19%	0,98%
5	0	0,00%	0,10%

Não recomendamos solicitar que os estudantes lancem a esfera na tábua centenas de vezes como fizemos aqui. Mostrar o gráfico e explicá-lo, apresentando também alguma simulação em computador, deve ser suficiente para que eles visualizem a distribuição da variável com que estão lidando. O mais importante é deixar claro que a maioria das situações experimentais pode ser interpretada de maneira semelhante à tábua de Galton: diversas fontes de variabilidade combinadas tendem a produzir uma distribuição aproximadamente normal.

Gráfico 1. Histograma para os resultados na tábua de Galton.



A partir da distribuição de probabilidades dada por (6) é possível se obter a média (μ_x) e o desvio padrão (σ_x) esperado para x (isto é, a média e o desvio padrão em um conjunto muito grande, virtualmente infinito de resultados) na tábua de Galton. A média é dada por

$$\mu_x = \sum P(x).x \; . \qquad (7)$$

Ora, por uma simples consideração de simetria das probabilidades em torno de $x = 0$, resulta que a média é nula.

O desvio padrão é dado por

$$\sigma_x = \sqrt{\sum(P(x).(x - \mu_x)^2)}. \qquad (8)$$

Calculando-se o desvio padrão esperado se encontra

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}001.-5^2 + 0{,}0098.-4^2 + \cdots + 0{,}0098.4^2 + 0{,}001.5^2} \qquad (9)$$

$$\sigma_x = \sqrt{2{,}50} = 1{,}581 \qquad (10)$$

Outra forma de se calcular o desvio padrão dos resultados no Quincunx, prescindindo da distribuição de probabilidades dada em (6), é por utilizar o importante teorema citado na nota de rodapé 4. Como o resultado x, de acordo com a expressão (1), é uma variável aleatória compósita com dez componentes e, sendo o desvio padrão de cada componente igual a 0,5 (as componentes são variáveis binomiais com valores -0,5 e 0,5 igualmente prováveis[5]), decorre do teorema referido que

$$\sigma_x = \sqrt{10.0{,}5^2} = \sqrt{2{,}50} = 1{,}581 \qquad (11)$$

A média e o desvio padrão efetivamente obtidos para o conjunto de 922 lançamentos são respectivamente $\bar{X} = 0{,}02$ e $S_X = 1{,}59$. A incerteza na média de x é então u = $S_{\bar{x}}$ = 0,05. Constata-se então que os resultados dos lançamentos em nosso Quincunx são consistentes com o modelo probabilístico a ele aplicado.

4.3. Procedimentos propostos

A partir da discussão realizada até aqui, é possível propor um procedimento simples (e talvez divertido) em que os alunos poderão exercitar os conceitos de erro e incerteza, tomando consciência de que, na maioria das situações experimentais, podem pressupor que a variável que estão medindo está sujeita a flutuações segundo uma distribuição normal devido à interveniência de diversas fontes de erro no processo de medição.

Como proposta de atividade, um estudante de cada grupo escolhe um número inteiro R qualquer entre 10 e 90. O número escolhido deve ser anotado em uma folha de papel sem que os outros colegas do grupo tomem conhecimento.

[5] O desvio padrão de uma variável binomial, equiprovável, é a diferença entre o maior e o menor valor (amplitude da variável) dividido por dois.

Fora do campo de visão de seus colegas, o estudante soltará a esfera na tábua de Galton, declarando somente o resultado da operação $r = R + x$. Nesta operação, r representa o valor observado; R é o número escolhido em segredo e representa o valor (verdadeiro) do mensurando e x é o resultado da tábua, que deve ser somado ao valor verdadeiro representando o ruído ou erro da medida. Ao todo, recomendamos realizar 20 observações.

Os estudantes que desconhecem o valor verdadeiro X devem calcular a média de R (representada por $\bar{R}$), o desvio padrão de R (representado por S_R) e o desvio padrão da média de R (representado por $S_{\bar{R}}$) para as amostras que correspondem às 5, 10, 15 e 20 primeiras observações (será necessário fazer uma breve introdução a respeito do desvio padrão da média, justificando sua existência e mostrando como calculá-lo).

Resultados obtidos experimentalmente encontram-se na tabela 2.

Tabela 2. Média e desvio padrão da média para o valor verdadeiro $X = 32$.

Número de observações	Dados Obtidos	Média $\bar{r}$	Desvio padrão S_r	Desvio Padrão da Média $S_{\bar{r}}$
5	32, 32, 29, 29, 33	31,0	1,9	0,8
10	anteriores e 34, 33, 33, 29, 32	31,6	1,9	0,6
15	anteriores e 31, 30, 34, 33, 31	31,7	1,8	0,5
20	anteriores e 33, 34, 30, 32, 35	32,0	1,8	0,4

A respeito da tabela 2, é importante fazer as seguintes considerações:

- O desvio padrão de r resultou consistente com a expectativa teórica dada pela expressão (10).
- O desvio padrão da média $S_{\bar{r}}$ é uma medida da incerteza sobre a média $\bar{r}$.
- Quando o número de observações aumenta, a incerteza $S_{\bar{r}}$ tende a diminuir.
- A redução da incerteza não é proporcional ao aumento de observações (na verdade o desvio padrão da média é inversamente proporcional à raiz quadrada do número de observações). Existe um ponto a partir do qual o trabalho que se tem em aumentar o número de observações não é compensado por uma redução significativa na incerteza da medição.

A etapa seguinte da análise é usar os valores médios e os desvios padrão das médias para determinar intervalos de cobertura.

4.4. Determinando intervalos de cobertura

Intervalos de cobertura são intervalos em que a probabilidade de ocorrência do valor verdadeiro (ou da média do conjunto de valores verdadeiros) está especificada. Tais intervalos são importantes porque permitem contornar a impossibilidade de se conhecer exatamente o valor (ou os valores) de grandezas que só podem ser determinadas por meio de experimentos.

A determinação dos intervalos de confiança requer ter obtido o resultado da medição (que pode ser a média de uma série de observações feitas aproximadamente sob as mesmas condições), a incerteza desse resultado (que pode ser expressa pelo desvio padrão da média) e conhecer a distribuição de probabilidades que descreve a variabilidade do resultado.

A respeito da distribuição de probabilidades, o Teorema Central do Limite (ilustrado com resultados da tábua de Galton) oferece fortes razões teóricas para aceitarmos como pressuposto que a média[6] de resultados experimentais segue uma distribuição aproximadamente normal ou gaussiana.

A forma geral de um intervalo de cobertura é $(\bar{x} - k \cdot S_{\bar{x}}, \bar{x} + k \cdot S_{\bar{x}})$, em que k é um número real positivo chamado fator de abrangência. Tendo assumido como válida a distribuição normal de probabilidades para a média, os fatores de abrangência e as respectivas probabilidades de cobertura podem ser obtidos da tabela 3.

Tabela 3. Intervalos e probabilidades de cobertura.

Probabilidade de cobertura *p*	**Fator de Abrangência *K***
68%	1,0
90 %	1,6
95 %	2,0
99 %	2,6
99,7 %	3,0

A partir dessas informações, e tendo escolhido a probabilidade de cobertura $p = 95\%$, foram elaborados intervalos de cobertura para a série de 5, 10, 15 e 20 observações. Os resultados encontram-se na Tabela 4.

[6] Mesmo quando as medidas individuais não se encontram normalmente distribuídas, a média de um conjunto de medidas terá distribuição aproximadamente normal. Tal decorre do fato que uma média é uma soma de variáveis e, portanto, vale o Teorema Central do Limite para esta medida de tendência central.

Tabela 4. Intervalos de cobertura para cada série de observações.

Número de observações	Média $\bar{r}$	Desvio Padrão da Média $S_{\bar{r}}$	Intervalos de Cobertura
5	31,0	0,8	(29,4; 32,6)
10	31,6	0,6	(30,4; 32,8)
15	31,7	0,5	(30,7; 32,7)
20	32,0	0,4	(31,8; 32,8)

Como é possível perceber, a largura dos intervalos de cobertura diminui com o aumento da quantidade de observações. A partir da série que contém 20 observações e da consideração adicional de que o valor verdadeiro é inteiro, é possível se concluir (com probabilidade de 95%) que o valor verdadeiro é 32 ou 33. Este resultado exemplifica que a determinação experimental do valor de uma grandeza sempre está sujeita a alguma incerteza.

5. Considerações finais

O ensino de metrologia tem uma forte componente tradicional e um dos maiores obstáculos para a introdução de novos conceitos e procedimentos desse campo nas aulas de Física básica experimental é a formação tradicional que a grande maioria dos professores recebeu e que tende a se reproduzir nas gerações mais novas de estudantes. Neste artigo, discutimos os conceitos de erro e incerteza segundo as diretrizes mais atuais do campo da metrologia, sugerindo uma maneira de introduzir tais conceitos para o estudante de graduação com auxílio da tábua de Galton, interessante recurso didático.

A partir da tábua de Galton é possível distinguir erro e incerteza: o erro como quantidade, ora positiva, ora negativa, que, somada ao valor do mensurando, produz flutuações no resultado da medição; a incerteza como desvio padrão da média de uma série de observações realizadas sob as mesmas condições e como medida da confiabilidade da média dessa série de observações.

Além disso, foi possível discutir o Teorema Central do Limite a partir da tábua de Galton nos aspectos que interessam às atividades experimentais, argumentando que, na maioria das situações de laboratório, devido à existência de muitas fontes de erro, podemos considerar que o resultado da medição flutua aproximadamente segundo uma distribuição normal.

Como a relação entre fatores de abrangência e probabilidades de cobertura está dada para variáveis que flutuam segundo uma distribuição normal (e a média de um conjunto de observações tem distribuição aproximadamente gaussiana mesmo quando as observações individuais não se distribuem dessa forma), é possível elaborar intervalos de abrangência a partir do resultado da medição e da incerteza dessa medição.

Enfim, embora não consideremos necessário apresentar os conceitos de erro e incerteza em todos os seus detalhes ao estudante – sobretudo ao estudante do primeiro semestre – com este artigo, demonstramos que é possível introduzir e discutir com alguma profundidade e consistência conceitos fundamentais do campo da metrologia no Ensino de Física superior.

6. Referências

BUFFLER, A.; ALIE, S.; LUBBEN, F. Teaching measurement and uncertainty the GUM way. **The Physics Teacher**, v. 46, n. 9, p. 539-543. 2008.

CRUZ, A.; FILIPE, E.; ALMEIDA, G.; VALADARES, J.; PELLEGRINO, O. Medições e incerteza de medição: Um contributo baseado nas convenções e resoluções internacionais. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 26, n. 1, p. 125-135. 2009.

HACKING, I. **La domesticación del azar.** Barcelona: Gedisa, 1991. 363 p.

JOINT COMMITEE FOR GUIDES IN METROLOGY (JCGM). **Evaluation of measurement data: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM).** 1 ed. Sèvres: BIPM, 2008a. 120 p. Disponível em <www.bipm.org/en/publications/guides>. Acesso em 17 set. 2010.

JOINT COMMITEE FOR GUIDES IN METROLOGY (JCGM). **International vocabulary in metrology: Basic and general concepts and associated terms (VIM).** 3 ed. Sèvres: BIPM, 2008b. 90 p. Disponível em <www.bipm.org/en/publications/guides>. Acesso em 17 set. 2010.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado.** Rio de Janeiro: Zahar, 2009. 261 p.

NUNNALLY, J. C. **Psychometric theory.** New York: McGraw-Hill, 1978. 701 p.

PIAGET, J. e INHELDER, B. **A origem da idéia do acaso na criança.** Rio de Janeiro: Record, 1974. 328 p.

POPPER, K. R. **A teoria dos quanta e o cisma da física.** Lisboa: D. Quixote, 1989. 227 p.

SIEGEL, P. Having fun with error analysis. **The Physics Teacher**, v. 45, n. 4, p. 232-235. 2007.

SPIEGEL, M. R. **Estatística.** São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 580 p.

SILVEIRA, F. L. Marés, fases principais da lua e bebês. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 20, n. 1, p. 10-29. 2003.

SILVA, W.P.; SILVA, C.M.D.P.S.; SILVA, C.D.P.S.; SILVA, H.J.G. Geração de incertezas de funções redutíveis ao primeiro grau ajustadas pelo método dos mínimos quadrados. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 21, n. 3, p. 341-349. 1999.

VUOLO, J.H. Avaliação e expressão da incerteza em medição. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, n. 3, p. 350-358. 1999.

VENTSEL, H.**Théorie des probabilités.** Moscou: MIR, 193. 558 p.

VUOLO, J.H. **Fundamentos da teoria de erros.** 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996. 249 p.