Por Prof. Alberto Ricardo Präss
Adaptado de “Física” de Carlos Alberto Gianotti e Maria Emília Baltar

OSCILAÇÕES: Movimento Harmônico Simples - M. H. S.

Todo movimento que se repete em intervelos de tempo iguais é chamado de periódico. Mais precisamente, poderíamos dizer que, no movimento periódico, o móvel ao ocupar, sucessivamente, a mesma posição na trajetória, apresentar sempre a mesma velocidade e aceleração e que o intervalo de tempo para que ele se encontre duas vezes nessa posição, é sempre o mesmo. Deste tipo são:

a) movimento circular uniforme,
b) o movimento da Terra em torno do Sol,
c) o movimento de um pêndulo,
d) o movimento de uma lâmina vibrante,
e) o movimento uma massa presa à extremidade de uma mola, etc.

Como as equações do movimento periódico são expressas a partir das funções seno e co-seno, ele também é chamado movimento harmônico.

Movimento Oscilatório Harmônico

Um movimento é dito oscilatório ou vibratório quando o móvel se desloca periodicamente sobre uma mesma trajetória, indo e vindo para um lado e para outro em relação a uma posição média de equilíbrio. Essa posição é o ponto sobre a trajetória, para o qual a resultante das forças que agem sobre o móvel, quando aí passa, é nula.

Desse tipo são o movimento de um pêndulo, o movimento de uma lâmina vibrante e o movimento de um corpo preso a extremidade de uma mola.

Vejamos, para fixar a idéia, o movimento realizado por uma régua plástica presa à extremidade de uma mesa e posta a oscilar por ação de uma força externa.

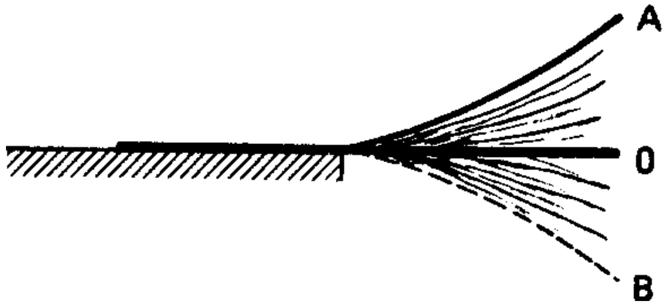


Figura 1

Na figura temos o ponto 0 como sendo a posição de equilíbrio. Na medida em que tiramos a régua dessa posição e a aproximamos do ponto A uma força na régua, de caráter elástico tendendo a conduzí-la de volta à posição de equilíbrio; quanto mais nos aproximamos de A, é claro que afastando-nos do 0, essa força - a que chamamos força restauradora - cresce. Se largarmos a régua em A, por ação da força restauradora, ela começa a retornar ao ponto 0. Na medida em que esse retorno ocorre, a velocidade da régua cresce e ao chegar no equilíbrio, em função da inércia, ela não pára, movimentando-se, então, em direção a B. Entretanto, no momento em que passar de 0 novamente surge a força restauradora que fará a sua velocidade decrescer até se anular no ponto B, onde a força será máxima. A partir desse ponto a régua retorna a 0 com velocidade crescente. Aí chegando novamente não pára, pela inércia. E assim a régua continuará oscilando até cessar o movimento em função do atrito.

Aliás, os movimentos oscilatórios que conhecemos não apresentam a característica da periodicidade devido ao atrito. As oscilações que nos são comuns são os que chamamos movimentos oscilatórios amortecidos. Portanto, para que possamos estudar esse movimento iremos sempre desprezar qualquer forma de atrito.

Período e Freqüência

Período (T), de um movimento periódico, é o tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do móvel por um mesmo ponto da trajetória (apresentando as mesmas características cinemáticas).

Como se trata de um intervalo de tempo, a unidade de período é o segundo.

Freqüência (f), de um movimento periódico, é o inverso do período. Numericamente, a freqüência representa o número de vezes que o móvel passa por um mesmo ponto da trajetória, com as mesmas características cinemáticas, na unidade de tempo.

A unidade de freqüência é o inverso da unidade de tempo ou seja 1/segundo. Esta unidade é também chamada "Hertz" (Hz). .

$$\mathbf{1\ s^{-1} = 1\ Hz}$$

Análise Qualitativa de uma Oscilação

Façamos, agora, um estudo qualitativo de uma oscilação completa realizada por um móvel, analisando velocidade, aceleração e força atuante, em distintos pontos da trajetória. Para tanto consideremos (fig. 2) um corpo, apoiado em um plano horizontal, preso à extremidade de uma mola; desprezemos qualquer forma de atrito.

Precisamos, entretanto, primeiramente caracterizar dois novos termos que utilizaremos daqui por diante no estudo das oscilações, quais sejam elongação e amplitude.

Elongação de uma oscilação em um dado instante é a distância a que o móvel se encontra da posição de equilíbrio no instante considerado.

Amplitude de um movimento oscilatório é a máxima elongação, isto é, a maior distância que o móvel alcança da posição de equilíbrio em sua oscilação. No exemplo que passaremos a estudar (fig. 2.2) a amplitude é A e uma elongação é x.

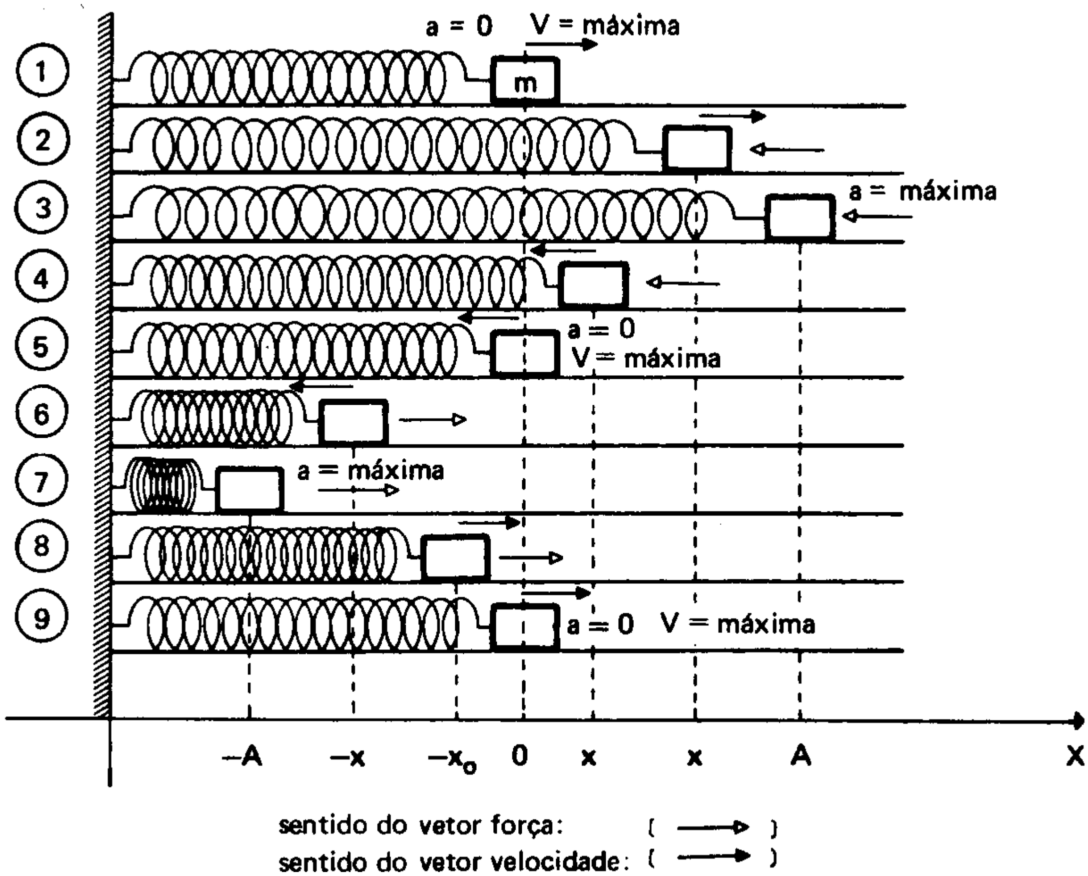


Figura 2

Tomemos um eixo horizontal X onde 0 é origem e representa a posição de equilíbrio. Suponhamos o movimento já em desenvolvimento e comecemos a analisá-lo a partir do momento em que o móvel passa pela posição de equilíbrio. Após esse instante a mola passará a exercer sobre o corpo uma força, a já referida força restauradora (de caráter elástico, no caso), que procura fazê-lo retornar a 0. Na medida em que m se afasta do equilíbrio, aumentando as elongações, a força restauradora cresce, mas nota-se que tem orientação contrária à do eixo. Da mesma forma, portanto, a aceleração. A velocidade do móvel decresce até atingir valor zero quando o móvel chega à posição A, onde a força restauradora será máxima. Partindo de A o móvel começa o retorno com velocidade crescente, porém, conforme diminuam as elongações, a força atuante sobre ele diminui em intensidade bem como a aceleração. Observamos que de A para 0, os vetores força, aceleração e velocidade têm todos a mesma orientação, contrária à do eixo. Ao atingir o ponto 0 a velocidade do corpo será máxima e, como aí a força é nula, em função da inércia o corpo passa dessa posição indo em direção à -A. De 0 para -A a força restauradora cresce, assim como a aceleração, sendo máximas em -A. A velocidade, nesse trajeto, decresce até atingir valor nulo no extremo da trajetória. De -A para 0 os vetores velocidade, aceleração e força têm o mesmo sentido do eixo.

Porém, enquanto a força e a aceleração decrescem, o valor da velocidade cresce, na medida em que o corpo aproxima-se de 0.

Se o móvel oscila em torno de sua posição de equilíbrio por ação de uma força que seja proporcional às elongações, então o movimento oscilatório é dito harmônico simples. Assim, sendo o corpo deslocado "x", do equilíbrio, por ação de uma força restauradora F, essa será dada por

$$\mathbf{F = -k\,x}$$

onde o sinal (-1) indica que o sentido da força será contrário ao deslocamento, quando x for positivo, e que terá o mesmo sentido quando x for negativo. Observamos que a força restauradora é tal que é sempre dirigida para a posição de equilíbrio, sendo por isso, algumas vezes, chamada força central.

Elongação, Velocidade, Aceleração e Força no M. H. S.

Para que possamos estabelecer as equações que nos permitam o cálculo da elongação, velocidade, aceleração e força atuante em um dado instante de um MHS iremos considerar o deslocamento de um ponto material sobre uma trajetória circunferencial de raio R. Isto é, uma partícula realizando movimento circunferencial uniforme.

Se tomarmos o movimento da projeção P - do ponto material M que realiza M. C. U. - sobre um diâmetro da trajetória, veremos que se trata de um MHS. É evidente que a projeção P oscilará em relação ao centro da trajetória com amplitude igual ao raio da mesma. No caso iremos trabalhar com o diâmetro horizontal.

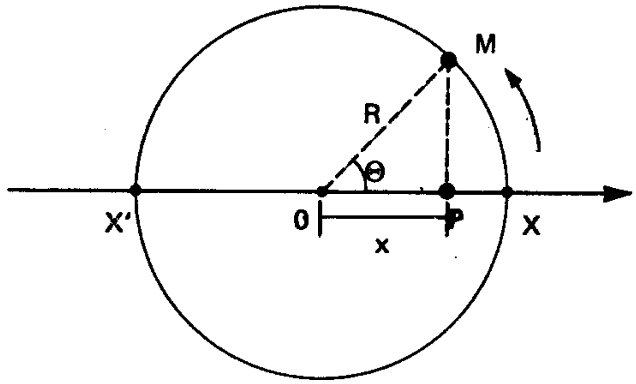


Figura 3

Primeiramente, estabeleçamos a equação da ***elongação*** do MHS.

O ponto 0 será a posição de equilíbrio e, de acordo com a fig. 3, a elongação, para a posição em que se encontra o ponto M, é x.

Pelo triângulo 0PM diremos que

$$x = R\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Mas o raio R é igual à amplitude A do movimento oscilatório realizado por P. Pelo que estudamos no MCU, temos que a velocidade angular de M pode ser dada por:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

logo

$$\Delta\theta = \omega\Delta t$$

ou simplificando

$$\theta = \omega t$$

onde t é o tempo para M percorrer o arco que compreende o ângulo θ Então, a equação (1) poderá ser escrita:

$$x=A\cos(\omega t) \qquad \textbf{(2)}$$

Porém a velocidade angular poderá também ser dada por

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

ande f é a freqüência do movimento circunferencial e, conseqüentemente a freqüência da oscilação realizada por P. Logo, a equação (2) poderá ser escrita:

$$x=A\cos(2\pi ft)$$

equação essa que nos permite calcular a elongação x, em um instante t, de um MHS, cuja amplitude é A e cuja freqüência é f.

Costumamos denominar o ângulo θ de ***fase*** do movimento. Como o movimento de M é uniforme θ crescerá linearmente com o tempo teremos

$$\theta=\omega t + \phi$$

onde o ângulo ϕ é a fase do movimento para t=0 e que chamamos ***fase inicial***. Observamos que dois movimentos oscilatórios de mesma amplitude podem diferir pela fase, o que determina que eles apresentem mesma velocidade e aceleração num mesmo ponto da trajetória mas em instantes diferentes.

A constante ω , na equação . (2) é chamada ***freqüência angular*** ou ***pulsação***.

A equação da elongação poderá ser escrita mais genericamente

$$x=A\cos(2\pi ft + \phi)$$

Estabeleçamos, agora, a equação da velocidade do M. H. S., determinando a velocidade do ponto P. Procederemos analogamente à determinação da equação da elongação, trabalhando, porém, com a velocidade linear do movimento circunferencial (fig. 4) A velocidade do Ponto P será a projeção do vetor velocidade linear do móvel M sobre o diâmetro.

Lembramos primeiramente que a velocidade linear em uni M. C. U. é dada

$$v=\omega R \quad \textbf{ou} \quad v=2\pi f$$

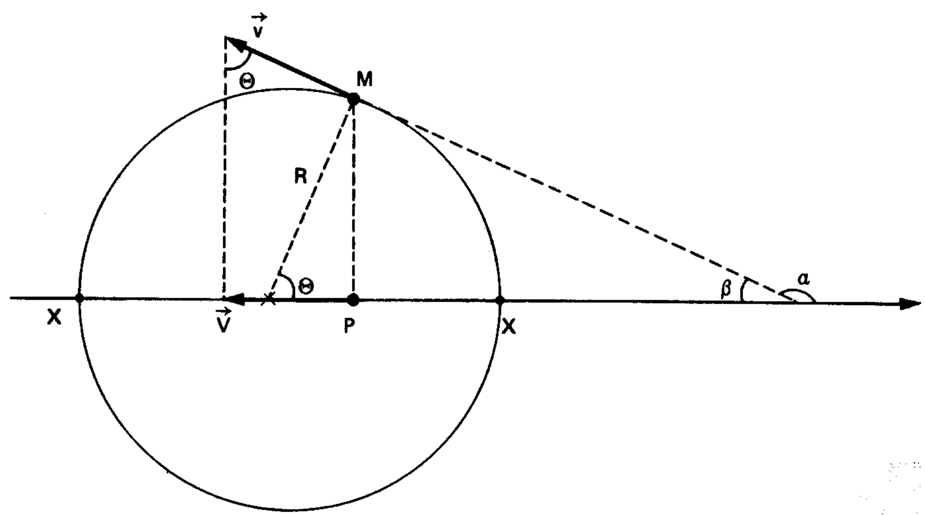


Figura 4

No caso a projeção do vetor velocidade linear sobre x'x será:

$$v=\omega R\cos\alpha = -\omega R\cos\beta=\omega R \mathrm{sen}\theta$$

Como o raio R é igual á amplitude A e $\theta=\omega t$ teremos

$$V=-\omega A \mathrm{sen}(\omega t)$$

de onde

$$V=-\omega A sen(2\pi ft)$$

A aceleração do MHS (fig. 5) é a projeção do vetor aceleração centrípeta do ponto M sobre o eixo x'x. Já estudamos que no MCU a aceleração centrípeta é dada por

$$a_c=\frac{v^2}{R}=\omega^2 R$$

A projeção do vetor a_c será:

$$a=a_c.\cos\gamma=-a.\cos\theta$$

isto é

$$a=-\omega^2 R\cos\theta=-\omega^2 A\cos\theta$$

como

$$x=A\cos\theta$$

vem

$$a=-\omega^2 x$$

ou

$$a=-4\pi^2 f^2 x$$

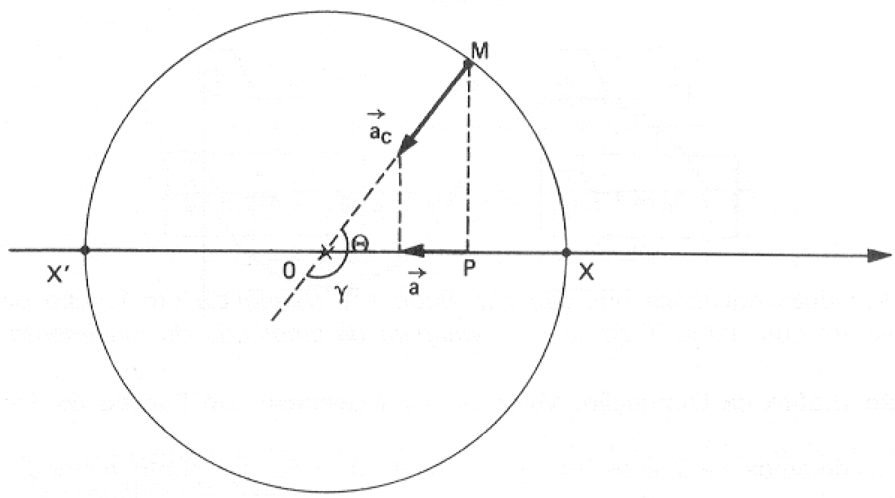


Figura 5

A intensidade da força restauradora pode ser encontrada a partir da equação fundamental da dinâmica.

$$F=ma$$

Admitindo-se que a massa de P é m e sendo, como já vimos,

$$a=\omega^2 x\,,$$

teremos:

$$F=m(-\omega^2 x)$$

Como m e ω são constante, podemos escrever

$$k=m\omega^2 \qquad \textbf{(3)}$$

de onde

$$F=-kx$$

Através dessa equação vemos que a F atuante em P é de caráter restaurador o que determina que o movimento seja realmente harmônico simples.

Podemos escrever, a partir de (3)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

sendo

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

teremos

$$\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ou} \quad 2\pi f=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

onde

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ou} \quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Essas duas equações nos dão o período e a freqüência em função de k e m e mostram que, tanto T como f independem da amplitude do movimento.

Expressão Gráfica da Elongação, Velocidade e Aceleração em Função do Tempo

Consideremos para esse estudo, o movimento de um ponto material A, com velocidade constante. A projeção P do ponto A, sobre o diâmetro vertical, realiza MHS. O período será T e assumiremos, no instante t=0, elongação nula.

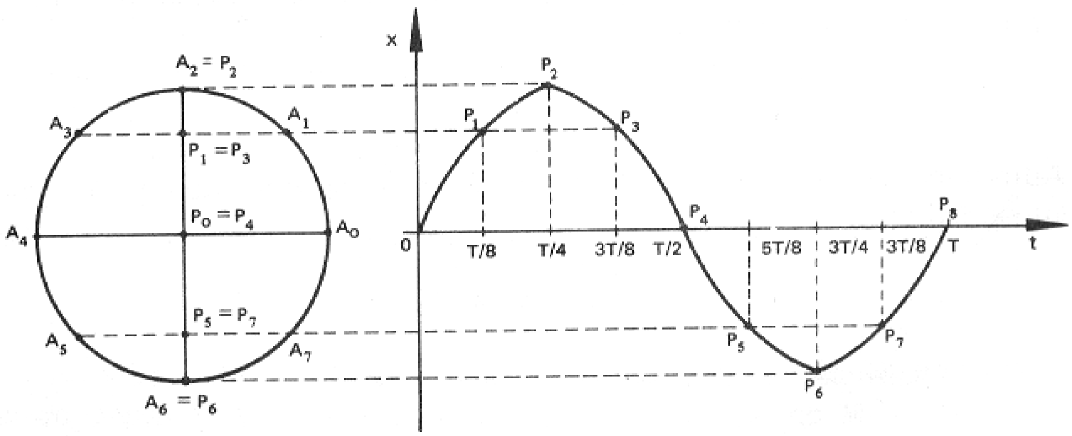


Figura 6

A seguir temos a representação da velocidade e da aceleração em função do tempo, feita de forma análoga, porém lembramos que para a elongação nula (x=0) a velocidade é máxima, enquanto a aceleração é nula.

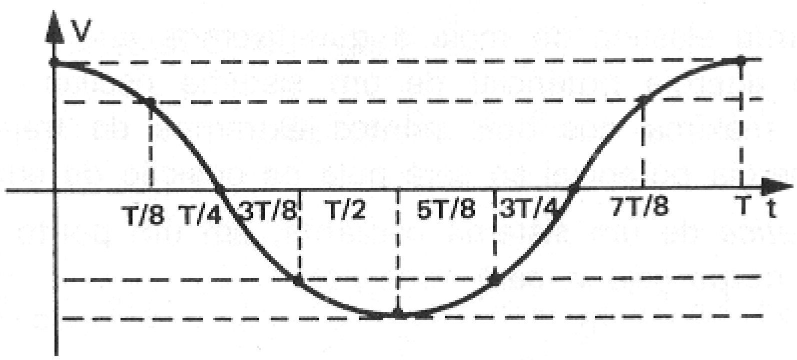


Figura 7

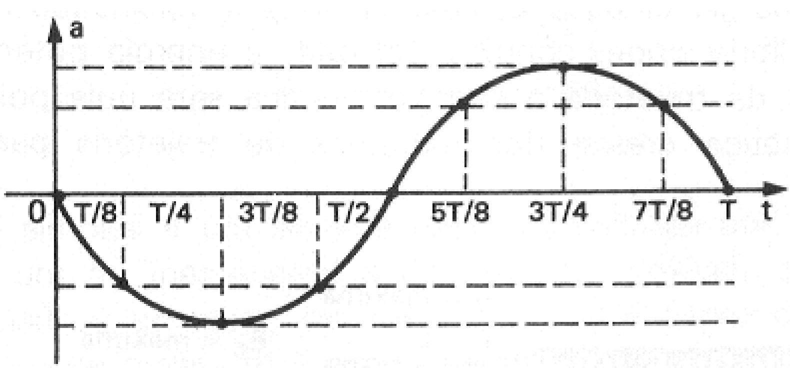


Figura 8

Para um perfeito entendimento do significado dos gráficos anteriores vamos tecer as seguintes observações:

- entre t = o e t = T/4: o vetor velocidade decresce, com o mesmo sentido do eixo e o vetor aceleração cresce, com sentido contrário ao mesmo;

- entre t = T/4 e t = T/2: o vetor velocidade cresce, com orientação contrária à do eixo e o vetor aceleração decresce, também com sentido contrário ao mesmo;

- entre t = T/2 e t = 3T/4: o vetor velocidade decresce, com sentido contrário ao eixo e o vetor aceleração cresce com o sentido do eixo;

- entre t = 3T/4 e t = T: o vetor velocidade cresce, com a mesma orientação do eixo, enquanto o vetor aceleração decresce, com o mesmo sentido do eixo.

-

Energia no MHS

A energia mecânica total de um sistema oscilante é dada pela soma da energia potencial com a energia cinética em um ponto qualquer da trajetória.

Em ponto de elongação x, para o oscilador harmônico mostrado na fig. 2, ao iniciarmos o presente estudo, a energia potencial - no caso de caráter elástico - será:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

onde k é a constante elástica de mola a que você estudou na Dinâmica. Logo, a energia potencial de um sistema oscilante cresce com as elongações, sendo máxima nos dois pontos extremos da trajetória (x=A). Evidentemente a energia potencial só será nula na posição de equilíbrio (x=0).

A energia cinética de um sistema oscilante, em um ponto trajetória onde a velocidade do corpo seja v, será dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Portanto, a energia cinética é máxima onde a velocidade e máxima, isto é na posição de equilíbrio onde, como já foi dito, a energia potencial é nula. Nos pontos extremantes da trajetória a energia cinética será nula pois aí v=0. Assim, a energia cinética cresce dos extremos da trajetória para a posição de equilíbrio.

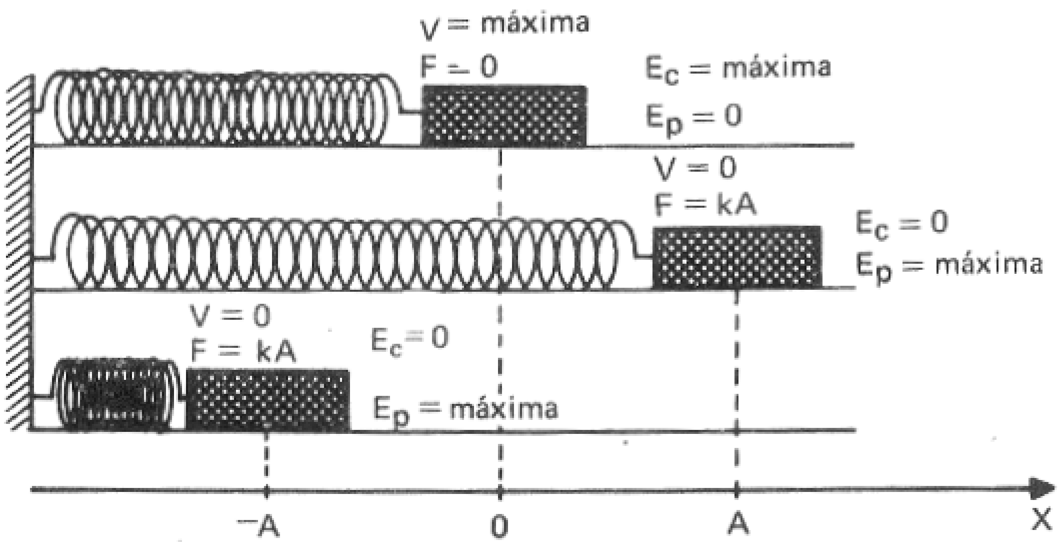


Figura 9

Retomemos, agora, as equações da energia potencial elástica e energia cinética .

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{e} \qquad E_p = \frac{1}{2}mv^2$$

Sabemos que:

$$k = m\omega^2$$

$$x = A\cos\theta$$

$$v = -\omega A\cos\theta$$

Substituindo os valores anteriores nas equações correspondentes, teremos

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\theta$$

e

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

que também nos permitem o cálculo das energias potencial e cinética num MHS.

Como a energia total é dada por

$$E_t = E_p + E_c$$

teremos

$$E_t = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$E_t = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

sabendo que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

logo

$$E_t = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

Pêndulo Simples

0 pêndulo simples é um sistema ideal, constituído por uma massa presa à extremidade de um fio inextensível e de peso desprezível, que tem a outra extremidade associada a um eixo, em torno do qual é capaz de oscilar. Na figura temos um pêndulo de massa m e comprimento ℓ.

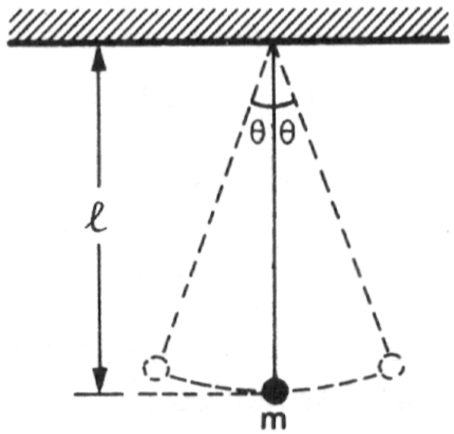


Figura 10

O pêndulo simples realiza movimento oscilatório e periódico. A amplitude do seu movimento é igual ao ângulo formado com a vertical quando o pêndulo está numa posição extrema.

0 pêndulo simples ideal realiza suas oscilações no vácuo com amplitude não superior a 15°.

Se levarmos o pêndulo até uma posição fora do equilíbrio, e o soltamos, ele irá oscilar por ação de uma força restauradora.

Na figura 11 temos um esquema das forças atuantes sobre a massa m. A componente da força-peso,

$$p' = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

é a força restauradora, isto é, a responsável pelo deslocamento.

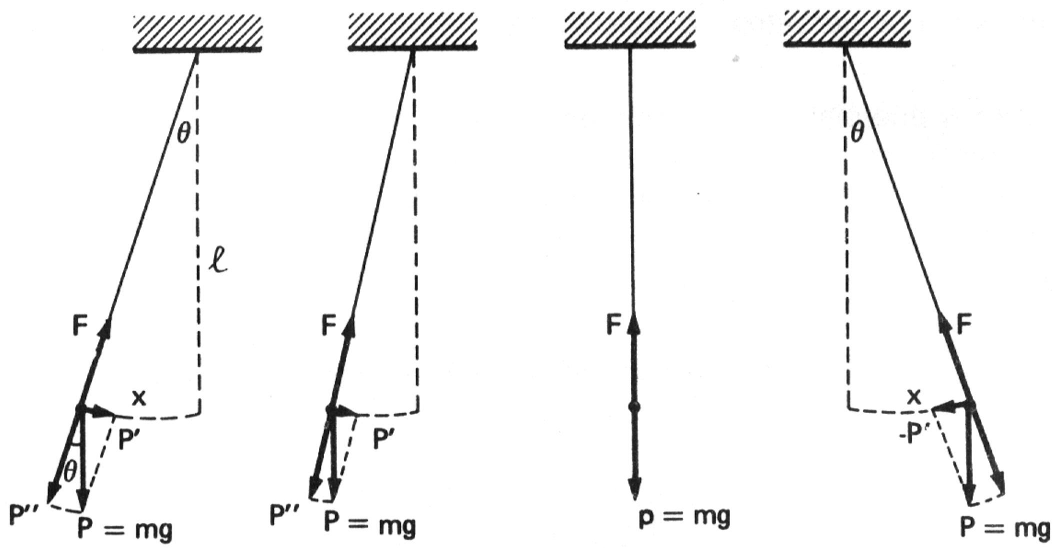


Figura 11

Portanto,

$$F=-mg\,\text{sen}\,\theta$$

Logo a F não é proporcional às elongações, não se tratando conseqüentemente, de um MHS. Entretanto será um M. H. S., se A < 15° porque para amplitudes até esse valor $\text{sen}\,\theta \cong \theta$ (θ em radianos). Dessa forma, também, o movimento da massa m será praticamente retilíneo, pois o arco de circunferência compreendido pela posição de equilíbrio e pela posição extrema será $\ell.\theta$, um valor muito pequeno, e que portanto, se aproxima de um segmento de reta. Assim podemos escrever:

A quantidade mg/ℓ é constante e podemos representá-la por k. Mas vimos que o período de um movimento harmônico é:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

logo, para o pêndulo simples teremos:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\ell}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

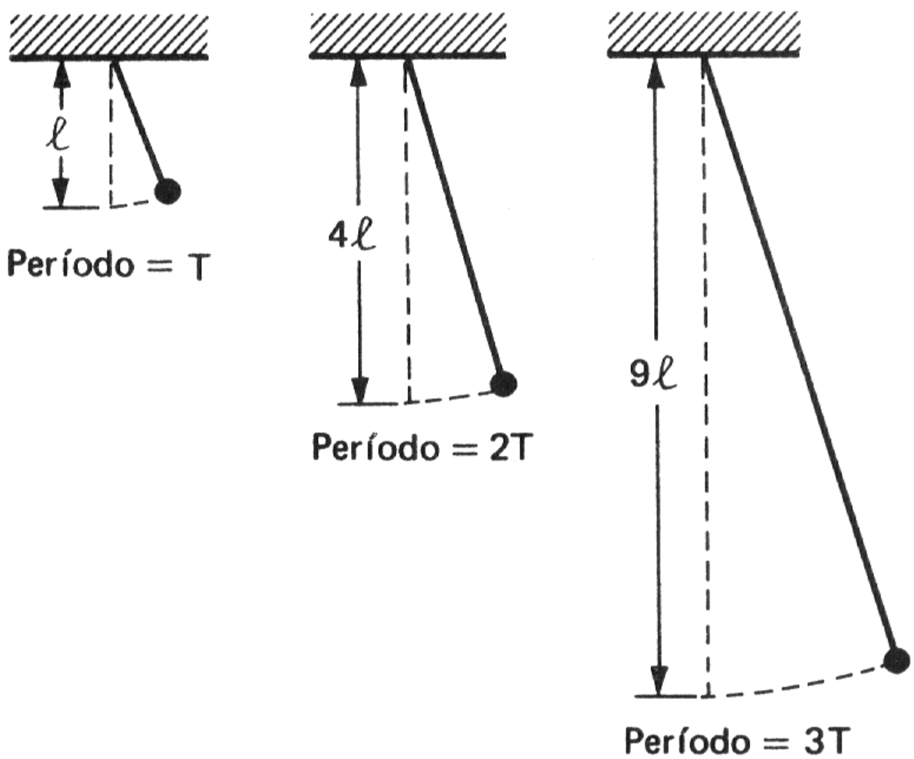
Analisando a última equação tiramos as seguintes conclusões:

1 - O período de um pêndulo simples independe da amplitude.

2 - O período de um pêndulo simples é independe de sua massa ou da substância que a constitui. Assim, para dois pêndulos de mesmo comprimento ℓ, e massa respectivamente m1 e m2, constituídas uma de chumbo e outra de ferro, sendo m_1 e m_2, verificamos que eles apresentam o mesmo período.

3 - O período de um pêndulo simples é diretamente proporcional à raiz quadrada de seu comprimento.

Observemos que se duplicarmos o comprimento do pêndulo o seu período não duplicará. Isso só ocorrerá caso o comprimento quadruplique (figura 12).



4 - O período de um pêndulo depende do lugar onde o mesmo se encontre, uma vez que depende da aceleração da gravidade. Aliás, uma das aplicações dos pêndulos simples é a determinação da aceleração da gravidade.

Finalizando, salientamos que a análise feita para o MHS é particularmente válida para o pêndulo simples no que se refere à velocidade, à aceleração e à energia, feitas as adaptações para o sistema em questão.

Exemplo:
Determinar o comprimento de um pêndulo cujo período é 2s em um local onde g = 9,8m/s^2:

Solução:

0 período do pêndulo é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

sendo

$$T = 2s \quad e \quad g = 9{,}8 m/s^2$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\ell}{g}$$

$$\ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

$$\ell = \frac{2^2 . 9{,}8}{4\pi^2} = \frac{9{,}8}{\pi^2} \cong 1m$$