OS FUNDAMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL [1]

Por Albert Einstein

A - Considerações básicas sobre o postulado da relatividade

§ 1 - Notas sobre a teoria da relatividade especial

A teoria da relatividade especial assenta n seguinte postulado, ao qual satisfaz também a mecânica de Galileu - Newton: se um sistema de coordenadas *K* for de tal maneira escolhido que as leis da física sejam nele válidas na sua forma mis simples, então as *mesmas* leis serão igualmente válidas em relação a qualquer outro sistema de coordenadas *K'* que em relação a *K* esteja animado de um movimento de translação uniforme. Chamaremos a este postulado o "Princípio da Relatividade Especial". Com a palavra "especial " deve entender-se que o princípio se restringe ao caso em que *K* ' tem um *movimento de translação uniforme* em relação a *K*, não devendo portanto a equivalência de *K* com *K'* estender-se ao caso em que haja movimento *não uniforme* de *K'* em relação *K*.

Sendo assim, não é o postulado da relatividade que afasta da mecânica clássica a teoria da relatividade, mas tão somente o postulado da constância da velocidade da luz no vácuo, do qual, em combinação com o princípio da relatividade especial, deriva, do modo conhecido, a relatividade da simultaneidade, assim como a transformação de Lorentz e as leis, com esta relacionadas, do comportamento em movimento dos corpos rígidos e dos relógios.

A modificação experimentada pela teoria do espaço e tempo através da teoria da relatividade especial é, na verdade, profunda; mas permanece intacto um ponto importante: a teoria da relatividade especial continua a aceitar que os princípios da geometria têm o significado imediato de leis sobre as possíveis posições relativas de corpos rígidos (em repouso) e, de um modo mais geral, que os princípios da cinemática são as leis que regem o comportamento das réguas de medição e dos relógios. A dois pontos materiais considerados sobre um corpo (rígido) corresponde sempre, segundo essas leis, um segmento de comprimento inteiramente determinado, independente da localização e da orientação do corpo, assim como do tempo; e a duas posições dadas de um ponteiro de relógio que esteja em repouso em relação a um sistema de referência (que seja admissível) corresponde sempre um intervalo de tempo de extensão determinada, independente de local e de época. Daqui a pouco se mostrará que a teoria da relatividade geral não pode aderir a uma interpretação física do espaço e tempo tão simples como esta.

§ 2 - Sobre as razões que sugerem a necessidade de uma extensão do postulado da relatividade.

A mecânica clássica, e, não menos que ela, a teoria da relatividade especial, incluem um defeito epistemológico que foi posto em evidência, provavelmente pela primeira vez, por E. Mach. Vamo-lo apresentar no exemplo seguinte: suponhamos que dois corpos fluídos, da mesma espécie e

[1] Extraído de Ann. d. Phys. 49 (1916).

igual tamanho, flutuam livremente no espaço, a uma distância de tal maneira grande um do outro (e de todas as restantes massas) que as únicas forças de gravitação a considerar são as que entre si exercem as partes componentes de *um mesmo* corpo.

Suporemos invariável a distância entre os corpos, e inexistente qualquer movimento relativo entre as partes de um mesmo corpo; mas admitiremos que cada uma das massas - vista por um observador imóvel em relação à outra — apresenta, em torno da reta que une as duas massas, um movimento de rotação de velocidade angular constante (havendo assim um movimento relativo verificável entre as duas massas). Imaginemos agora que, por meio de réguas (em repouso relativo), se fazem medições sobre as superfícies dos dois corpos (S_1 e S_2) , chegando-se à conclusão de que é esférica a superfície de S_1 e elipsoidal de revolução a de S_2.

Pergunta-se agora: por que razão se comportam de modo diverso S_1 e S_2 ? Uma resposta a esta pergunta só pode ser considerada satisfatória do ponto de vista epistemológico[2] se aquilo que se apresentar como causa dor um *fato experimental observável* : porque a lei da causalidade só pode tomar-se como uma lei do mundo da experiência se unicamente *fatos observáveis* aparecerem em última análise como causas e efeitos.

A mecânica newtoniana não dá a esta pergunta qualquer resposta satisfatória. Com efeito o que ela diz é o seguinte: as leis da mecânica têm validade num espaço R_1 em relação ao qual o corpo S_1 está em repouso, mas não a têm num espaço R_2 em relação ao qual está em repouso S_2 . O espaço admissível de Galileu que aqui se introduz (assim como o movimento relativo referido a ele) é uma causa *puramente fictícia, nada que seja observável*. Torna-se assim claro que a mecânica de Newton, no caso considerado, não satisfaz de fato, mas apenas de modo aparente, à exigência da causalidade, dado que atribui a uma causa meramente fictícia, R_1 , a diferença de comportamento que se observa nos corpos S_1 e S_2 .

Uma resposta aceitável para a questão acima formulada só pode ser a seguinte: como o sistema físico formado por S_1 e S_2 não apresenta dentro de si nada que seja possível imaginar como causa da diferença de comportamento de S_1 e S_2 , essa causa tem de se encontrar *fora* do sistema. Chega-se assim à idéia de que as leis gerais do movimento de que resultam, como aplicação particular, as formas de S_1 e S_2 devem ser tais que o comportamento mecânico destes corpos fique condicionado de um modo decisivo por massas distantes, não incluídas no sistema considerado. Em tais massas distantes (e nos seus movimentos relativos a respeito dos corpos considerados) é que se devem considerar residindo as causas, em princípio observáveis, da diferença de comportamento dos corpos de que nos estamos a ocupar: são elas que assumem o papel da causa fictícia R_1. De todos os espaços imagináveis R_1 , R_2, etc. , que se movam em relação uns aos outros de qualquer modo, nenhum deles deve "a priori "ser preferido, se não quisermos fazer ressurgir a objeção epistemológica apresentada. *As leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento.* Chegamos deste modo a um alargamento do postulado da relatividade.

Mas, além deste 'ponderoso argumento epistemológico, há também um fato físico bem conhecido que advoga uma extensão da teoria da relatividade. Seja K um referencial de Galileu, isto é, um sistema de referência tal que, em relação a ele (e pelo menos no domínio quadridimensional consi-

[2] É claro que uma tal resposta pode ser aceitável do ponto de vista epistemológico e no entanto continuar inaceitável do ponto de vista físico, por estar em contradição com outras experiências.

derado), uma massa suficientemente afastada de outras massas se desloca em movimento retilíneo e uniforme. Seja *K*' um segundo sistema de coordenadas que tem, em relação a *K* , um movimento de translação *uniformemente acelerado.* Teríamos então uma massa suficientemente afastada de outras massas animada de movimento acelerado relativamente a *K* ' , sendo a sua aceleração, tanto em grandeza como em direção, independente da sua composição material e do seu estado físico. Poderá um observador, em repouso relativamente a *K'* , inferir daqui que se encontra sobre um referencial "realmente" acelerado ?

A resposta a tal pergunta tem que ser negativa.

Com efeito, o referido comportamento de massas que se movem livremente em relação a *K'* é susceptível de uma outra interpretação, igualmente boa, que é a seguinte: o referencial *K'* não está animado de movimento acelerado, mas existe um campo de gravidade no domínio espaço-temporal considerado, e é esse campo que origina o movimento acelerado dos corpos em relação a *K'*.

O que torna possível esta maneira de conceber as coisas é o fato de a experiência nos ter ensinado que existe um campo de forças (o campo da gravidade) que possui a notável propriedade de comunicar a todos os corpos a mesma aceleração.[3] O comportamento mecânico dos corpos em relação a *K'* é o mesmo que a experiência nos revela em relação a sistemas que estamos habituados a considerar como sistemas "em repouso" , ou seja, como sistemas "admissíveis"; o que, do ponto de vista físico, sugere a aceitação de que os dois sistemas *K* e *K'* se podem com igual direito considerar "em repouso", isto é, como sistemas igualmente admissíveis para a descrição física dos fenômenos.

Resulta das considerações feitas que o desenvolvimento da teoria da relatividade geral deve conduzir ao mesmo tempo a uma teoria da gravitação, dado que se pode "produzir" um campo de gravidade por uma simples mudança de sistema de coordenadas. Vê-se também imediatamente que o princípio da constância da velocidade da luz no vazio tem de ser modificado; porque, como facilmente se compreende, a trajetória de um raio de luz em relação a *K'* é em geral curvilínea se, em relação a *K* , a luz se propagar em linha reta e com velocidade constante.

§ 3 - O contínuo espaço-tempo. Exigência de covariância geral para as equações que exprimem as leis gerais da natureza.

Na mecânica clássica, bem como na teoria da relatividade especial, as coordenadas de espaço e de tempo têm uma significação física direta. Dizer que um ponto-acontecimento tem a coordenada x_1 sobre o eixo X_1 significa: que a projeção do ponto-acontecimento sobre o eixo X_1 , feita por meio de réguas rígidas segundo as regras da geometria euclidiana, se pode obter aplicando sobre o eixo X_1, a partir da origem das coordenadas e no sentido positivo, x_1 vezes uma determinada régua - a régua-unidade. Dizer que um ponto tem sobre o eixo X_4 a coordenada $x_4 = t$ significa: que um relógio-unidade (regulado segundo determinadas prescrições), imóvel em relação ao sistema de coordenadas e coincidente no espaço (praticamente) com o ponto-acontecimento, tem acabado de efetuar $x_4 = t$ ciclos de funcionamento quando ocorre o ponto-acontecimento.[4]

-
[3] Eötvös demonstrou experimentalmente que o campo da gravidade possui com extrema precisão esta propriedade.

[4] A possibilidade de constatar a "simultaneidade" de acontecimentos em vizinhança espacial imediata, ou - mais rigorosamente — em vizinhança imediata espaço-temporal (coincidência) será aqui admitida sem dar uma definição a este conceito fundamental.

Esta concepção de espaço e de tempo sempre andou na mente dos físicos, ainda que inconscientemente para a maior parte deles, e a prova está o papel que estes conceitos desempenham na física métrica. E também o leitor deve ter alicerçado nessa concepção a segunda das reflexões do parágrafo anterior para poder ligar um sentido a esses raciocínios. Mas vamos mostrar agora que ela tem de ser abandonada e substituída por outra mais geral, se quisermos conciliar o postulado da relatividade geral com a validade da teoria da relatividade especial no caso limite da ausência de campo da gravidade.

Num espaço livre de campos de gravidade introduzamos um sistema de referência de Galileu *K (x, y, z t)* e, além disso, um sistema de coordenadas *K'* (*x', y', z', t')* em movimento de rotação uniforme. Supõem-se em coincidência permanente as origens dos dois sistemas, assim como os seus eixos *Z*. vamos mostrar que as normas acima estabelecidas para definir o significado físico de comprimentos e tempos não podem ser mantidas para uma medição espaço-temporal no sistema *K'*. Por razões de simetria, é claro que uma circunferência traçada no plano *X-Y* de *K* com centro na origem pode, ao mesmo tempo, ser considerada como circunferência no plano *X' - Y'* de *K'* . Suponhamos agora que se mede o perímetro e o diâmetro desta circunferência com uma régua-unidade (infinitamente pequena em relação ao raio) e que se calcula o quociente dos resultados das medições. Se a experiência tiver sido efetuada com uma régua imóvel em relação ao sistema de Galileu *K* , obter-se-á como quociente o número π . Mas o resultado será um número maior que π se for obtido com uma régua que esteja imóvel em relação ao sistema *K'*. Reconhece-se isto facilmente quando se aprecia todo o processo de medição partindo do sistema "em repouso" *K*, e se tem em conta que a régua disposta ao longo da circunferência sofre a contração de Lorentz, ao passo que uma régua disposta ao longo do raio não a sofre. Sendo assim, a geometria euclidiana não é válida no sistema *K'*; e o conceito de coordenada acima definido, visto que pressupõe a validade daquela geometria, também não é aplicável ao sistema *K'* .

Também não será possível introduzir em *K'* um tempo que corresponda às exigências da física, definindo-o com relógios de idêntica constituição, imóveis em relação a *K'* . Para o reconhecermos, bastará que imaginemos dois relógios idênticos, um na origem das coordenadas, outro sobre a circunferência, sendo observados a partir do sistema "em repouso" *K* . De acordo com um conhecido resultado da teoria da relatividade especial, o relógio colocado sobre a circunferência apresenta - quando observado de *K* - um ritmo de funcionamento mais lento que o relógio colocado na origem, visto que aquele está animado de movimento e este não. Um observador situado na origem comum das coordenadas que fosse capaz de observar, por meio da luz, o relógio situado sobre a circunferência, verificaria portanto que este relógio se atrasa em relação ao relógio que tem junto de si. E, recusando-se a admitir que a velocidade da luz, no percurso em questão, dependa explicitamente do tempo, ele interpretará a sua observação dando-lhe o significado de que o relógio colocado sobre a circunferência tem "realmente" um ritmo mais lento que o relógio colocado na origem. Deste modo não lhe será possível evitar uma definição de tempo que inclua o fato de o ritmo de um relógio depender do lugar em que se encontra.

Chegamos assim a esta conclusão: na teoria da relatividade geral não é possível dar às grandezas espaço e tempo definições que permitam a medição direta de diferenças de coordenadas espaciais por meio de uma régua-unidade e a de intervalos de tempo por meio de um relógio-padrão.

Assim, o processo até agora utilizado para estabelecer coordenadas, de uma maneira determinada, no contínuo espaço-temporal, torna-se impraticável, e não parece haver nenhum outro caminho que permita encontrar sistemas de coordenadas de tal forma adequados ao universo quadridimensional que da sua aplicação se pudesse esperar para as leis da natureza uma formulação particularmente simples. nada mais resta, por conseguinte, que considerar como equivalentes em princípio para a descrição da natureza todos os sistemas de coordenadas que se possam imaginar.[5] Isto equivale a exigir a seguinte condição:

As leis gerais da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral).

É claro que uma física que satisfaça a este postulado também satisfaz o postulado da relatividade geral, porque em *todas* as substituições estão sempre necessariamente incluídas aqueles que correspondem a todos os movimentos relativos dos sistemas de coordenadas (tridimensionais). Que esta exigência de convari6ancia geral, que tira ao espaço e ao tempo os últimos resíduos de objetividade física, seja uma exigência natural resulta da reflexão seguinte. Todas as nossas constatações espaço-temporais reduzem-se sempre à determinação de coincidências espaço-temporais. Se, por exemplo, o processo consistir apenas no movimento de pontos materiais, a única coisa que em última análise é observável é o encontro de dois ou mais desses pontos. Mesmo os resultados das nossas medições outra coisa não são que a constatação de tais encontros entre pontos materiais das nossas réguas e outros pontos materiais, ou então coincidências entre ponteiros de relógios, pontos de mostrador e os pontos-acontecimentos que se estão considerando e ocorrem no mesmo lugar e no mesmo instante.

A introdução de um sistema de referência não têm outro fim que não seja uma descrição mais fácil do conjunto de tais coincidências. Suponhamos que se associam ao universo quatro variáveis espaço-temporais x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , de tal modo que a cada ponto-acontecimento corresponda um sistema de valores das variáveis x_1 , ... x_4 . A dois pontos-acontecimentos em coincidência corresponde o mesmo sistema de valores das variáveis x_1 , ... x_4 ; isto é, a coincidência caracteriza-se pela identidade dos valores das coordenadas. Se em vez das variáveis x_1 , ... x_4 se introduzirem como coordenadas de um novo sistema funções arbitrárias delas, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 de tal modo que os sistemas de valores se correspondam univocamente, então também no novo sistema a coincidência espaço-temporal de dois pontos-acontecimento se exprimirá pela identidade de valores de cada uma das quatro coordenadas. Como toda a nossa experi6encia física pode, em última análise, ser reduzida a tais coincidências, não há nenhuma razão para dar preferência a determinado sistema de coordenadas em relação a outros, isto é, chegamos ao postulado da covariância geral.

§ 4 Relação das quatro coordenadas com os resultados das medições espaciais e temporais. Expressão analítica para o campo da gravidade.

Não é minha intenção neste artigo apresentar a teoria da relatividade geral como um sistema lógico, simplificado na medida do possível, com um mínimo de axiomas. O meu fim principal é antes desenvolver esta teoria de modo a fazer sentir ao leitor como é psicologicamente natural o caminho que se tomou e como se revelam seguras através da experiência as bases de que se partiu. Com este objetivo em vista, estabeleceremos agora a seguinte premissa:

Desde que se faça uma escolha apropriada de coordenadas, torna-se possível a teoria da relatividade no sentido restrito a domínios quadridimensionais infinitamente pequenos.

[5]Não mencionaremos aqui certas restrições impostas pela exigência da coordenação unívoca e pela da continuidade.

Nessa escolha deve atribuir-se ao sistema de coordenadas infinitamente pequeno "local" um estado de aceleração tal que fique removido todo e qualquer campo de gravidade: o que para uma região infinitamente pequena é possível. Sejam X_1, X_2, $X_{\#}$, as coordenadas espaciais de tal sistema; X_4 a respectiva coordenada temporal , medida numa unidade apropriada [6]. Estas coordenadas têm para uma dada orientação do sistema de coordenadas, um significado físico direto dentro da teoria da relatividade especial, desde que se adapte como régua-unidade uma barra rígida. A expressão:

(1) $$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 - dX_4^2$$

tem então, segundo a teoria da relatividade espacial, um valor que é independente da orientação do sistema de coordenadas local e que é determinável por medição espaço-temporal. Chamaremos a *das* grandeza do elemento da linha correspondente a pontos infinitamente próximo do espaço quadridimensional. Se o ds^2 correspondente ao elemento (dX_1 .... dX_4) for positivo, nós diremos como Minkowski que este último elemento é de gênero temporal e no caso contrário de gênero espacial.

Suponhamos que, em vez do sistema "local" de características especiais acima referido, se adapta como referencial um sistema quadridimensional qualquer, definindo-o para a região que estamos considerando. Então, ao nosso " elemento de linha", ou ao respectivo par de pontos-acontecimento, corresponderão também determinadas diferenciais dx_1 ... dx_4 das coordenadas desse referencial. E então os dX_v serão representáveis por expressões lineares e homogêneas. dos $dx\sigma$:

(2) $$dX_y = \sum_\sigma \alpha\gamma\sigma \; dx\sigma$$

Se se introduzirem estas expressões em (1) , obtém-se

(3) $$ds^2 = \sum g\,\sigma\tau \; dx\sigma\, dx\tau$$

Nestas expressões, os g $\sigma\tau$ são funções dos xσ . os seus valores não poderão já depender da orientação e do estado de movimento do sistema de coordenadas "local", se quisermos admitir como definição para o ds^2 a de uma grandeza associada a pares de pontos acontecimento considerados no espaço-tempo, independente de qualquer escolha particular de coordenadas, e determinável por meio de medições de régua e relógio. Imporemos à escolha dos g σ*t a condição* g $\sigma\tau$ = g $\sigma\tau$. O somatório, estendido a todos os valores de σ *e* τ , dar-nos-á então uma soma de 4 x 4 parcelas, das quais 12 são duas a duas iguais.

Da definição que acabamos de dar ao ds^2 poderá passar-se para o caso da teoria da relatividade habitual sempre que o condicionamento particular dos g $\sigma\tau$ num domínio finito permita estabelecer nesse domínio um sistema de referência em que os g $\sigma\tau$ assumam os valore constantes

[6] A unidade de tempo deve ser escolhida de tal modo que a velocidade da luz no vácuo — medida no sistema de coordenadas " local " — seja igual a 1.

$$(4) \qquad \left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right.$$

Veremos mais tarde que a escolha de tais coordenadas para domínio finitos não é geralmente possível.

Das considerações feitas nos §§ 2 e 3 resulta que, do ponto de vista físico, as grandezas g $\sigma\tau$ devem ser consideradas como sendo aquelas que, relativamente ao sistema de referência que foi escolhido, fazem a descrição do campo de gravidade. Com efeito, admitamos que, para um determinado domínio quadridimensional considerado, se conseguiu alcançar a validade da teoria da relatividade especial mediante uma adequada escolha das coordenadas. Os g $\sigma\tau$ têm então os valores dados em (4). Um ponto material livre terá então, em relação a este sistema, um movimento rectilíneo e uniforme. Se agora introduzirmos, por uma substituição arbitrária, novas coordenadas espaço-temporais x_1 , ..., x_4, os g $\sigma\tau$ no novo sistema não serão já constantes, ma sim funções do espaço-tempo. Ao mesmo tempo, o movimento do ponto material livre apresenta-se nas novas coordenadas como um movimento curvilíneo, não uniforme, cuja lei é independente da natureza do ponto material móvel. Isso leva-nos a interpretá-lo como um movimento sujeito à influência de um campo de gravidade. A intervenção de um campo de gravidade aparece-nos, deste modo, associada a uma variabilidade espaço-temporal dos g $\sigma\tau$. No caso geral não é possível fazer uma escolha de coordenadas que permita alcançar a validade da teoria da relatividade especial num domínio finito, mas mesmo nesse caso manter-nos-emos fiéis à idéia de que g $\sigma\tau$ descrevem o campo gravitacional.

A gravidade desempenha pois, na teoria da relatividade geral, um papel excepcional em relação às outras forças, e particularmente em relação às forças electromagnéticas, visto que as 10 funções g $\sigma\tau$ que fazem a descrição do campo gravitacional determinam, ao mesmo tempo, as propriedades métricas do espaço métrico quadridimensional.

B - Instrumentos matemáticos para a construção de equações de covariância geral

Depois de termos reconhecido, nas páginas precedentes, que o postulado da relatividade geral leva à exigência de que os sistemas de equações da física sejam covariantes em relação a substituições arbitrárias de coordenadas x_1 , ..., x_4 , temos que pensar na maneira de obter essas equações de covariância geral. É deste problema, puramente matemático, que nos vamos ocupar agora. Como vamos ver, na sua resolução desempenha um papel fundamental o invariante *ds* , ao qual demos o nome de "elemento de linha " , tirado da teoria das superfícies de Gauss.

A idéia fundamental desta teoria geral dos covariantes é a seguinte: Suponhamos que se definem em relação a todo o sistema de coordenadas certos entes ("tensores"), sendo a definição feita por meio de um certo número de funções espaciais, que se chamarão as " componentes" do tensor. Há então determinadas regras pelas quais se podem calcular estas componentes para um novo sistema de coordenadas, desde que sejam conhecidas para o sistema original, e desde que seja também conhecida a transformação que liga os dois sistemas. Os entes a que daqui em diante chamaremos tensores são, além disso, caracterizados pelo fato de as equações de transformação para as suas componentes serem lineares e homogêneas. Sendo assim, todas as componentes no novo sistema se anulam, se isso também suceder a todas elas no sistema primitivo. Consequentemente uma lei da natureza que seja formulada pelo anulamento de todas as componentes de um tensor é de covariância geral: procurando as leis de formação dos tensores obteremos os meios de formulação de leis de covariância geral.

§ 5 - Quadrivetores contravariantes e covariantes.

Quadrivetor contravariante. O elemento da linha define-se pelas quatro componentes dx_y , cuja lei de transformação se exprime pela equação.

(5) $$d x'_\sigma = \sum_v \frac{\partial x'\sigma}{\partial x_y}$$

Os dx'_σ exprimem-se nos dx_v , por equações lineares e homogêneas; isto permite-nos considerar estas diferenciais das coordenadas dx_v como componentes de um " tensor" a que daremos a designação especial de quadrivetor contravariante. Todo o ente que em relação ao sistema de coordenadas se defina por meio de quatro grandezas A^y transformáveis segundo a mesma lei.

(5 a) $$A^{\sigma'} = \sum_v \frac{\partial x'\sigma}{\partial x_v} A^v$$

será igualmente denominado quadrivetor contravariante. De (5 a) resulta imediatamente que as somas ($A^\sigma \pm B^\sigma$) são componentes de um quadrivetor de A^σ e B^σ também o forem. O mesmo se aplica a todos os sistemas que mais tarde forem introduzidos como " tensores" (regra da adição e subtração dos tensores).

Quadrivetor covariante: Diremos que quatro grandezas A_y são as coponentes de um quadrivetor covariante se para toda e qualquer escolha de um vector contravariante B^y .

(6) $$\sum_v A_v B^v = Invariante.$$

Desta definição resulta a lei da transformação do quadrivetor covariante. Com efeito, substituindo no segundo membro da equação.

$$\sum_\sigma A\sigma' B^{\sigma'} = \sum_v A_v B^v$$

B^y pela seguinte expressão, que se obtém invertendo a equação (5 a)

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_v}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma'}$$

resulta $$\sum_\sigma B^{\sigma'} \sum \frac{\partial x^v}{\partial x'_\sigma} A_v = \sum_\sigma B^{\sigma'} A'_\sigma$$

mas daqui resulta a seguinte lei de transformação, se atender os a que os $B^{\sigma'}$ se podem escolher arbitrariamente, em completa independência uns dos outros.

(7) $$A\sigma' = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu$$

Nota sobre uma simplificação utilizada no modo de escrever as expressões

Um rápido exame das equações deste parágrafo mostra que, sempre que um índice aparece duas vezes debaixo do sinal de somatório, se efetua sobre ele uma soma [por exemplo o índice ν em (5)], e que é somente sobre tais índices que as somas se efetuam. Isto permite omitir o sinal de somatório, sem com isso prejudicar a clareza. Estabeleceremos então a seguinte regra: sempre que um índice apareça duas vezes num termo de uma expressão, subentende-se que sobre ele se efetua uma soma, a não ser que expressamente se declare contrário.

A diferença entre o quadrivetor covariante e o contravariante reside na lei de transformação [(7) ou (5 a) , respectivamente]. tanto uma como outra desta formas constituem tensores no sentido que atrás se deu a esta palavra, e é nisso que reside a sua importância. Seguindo Ricci e Levi-Civita, indicaremos o caráter contravariante com um índice superior e o covariante com um índice inferior.

§ 6 - Tensores de segunda ordem e de ordem superior.

Tensor contravariante. Se formarmos todos os produtos $A^{\mu\nu}$ das componentes A^μ e B^ν de dois quadrivetores contravariantes obteremos 16 quantidades.

(8) $$A^{\sigma\tau'} = A^\mu \ B^\nu$$

que, de acordo com (8) e (5 a) , satisfazem a lei de transformação

(9) $$A\sigma\tau' = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'\tau}{\partial x_\nu} \ A^{\mu\nu}$$

Chamaremos tensor contravariante de segunda ordem a um ente que, em relação a todo o sistema de referência, é descrito por 16 grandezas (funções) que obedecem à lei de transformação (9) . Nem todo o tensor desta espécie se pode construir, como (8), com dois quadrivetores. Mas pode-se demonstrar facilmente que 16 $A^{\mu\nu}$ arbitrariamente dados podem ser representados pelas somas dos A^μ e B^ν de quatro pares de vectores convenientemente escolhidos. E por isso quase todas as leis que são válidas para os tensores de segunda ordem definidos por (9) podem ter a sua demonstração muito simplificada, efetuando a prova para tensores especiais do tipo (8).

Tensor contravariante de qualquer ordem. É claro que, em correspondência com (8) e (9), também se podem definir tensores contravariantes da terceira ordem e de ordem mais elevada, com 4^3 . etc., componentes. Resulta igualmente de (8) e (9) que o quadrivetor contravariante se pode, neste sentido, considerar como tensor contravariante de primeira ordem.

Tensor covariante. Se, por outro lado, formarmos os 16 produtos $A_{\mu\nu}$ das componentes de dois quadrivetores covariantes A_μ e B_ν obteremos quantidades

(10) $$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu ,$$

para as quais é válida a lei de transformação

(11) $$A_{\sigma\tau}' = \frac{\partial x\mu}{\partial x'\sigma}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'\tau} A_{\mu\nu}$$

É por meio desta lei de transformação que se define o tensor covariante de segunda ordem. Todas as observações que até aqui se fizeram a respeito dos tensores contravariantes são igualmente válidos para os tensores covariantes.

NOTA: É conveniente tratar o escalar (invariante) como tensor de ordem zero, que tanto é contravariante como covariante.

Tensor misto: Pode também definir-se um tensor de segunda ordem do tipo.

(12) $$A_{\mu}\, \nu = A_{\mu}\, B^{\nu} \ ,$$

que é covariante quanto ao índice μ e contravariante quanto ao índice ν . A sua lei de transformação é

(13) $$A_{\sigma}^{\tau'} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\alpha'}^{\beta}$$

É claro que há tensores mistos com um número qualquer de índices de caráter covariante e com um número qualquer de índice de caráter contravariante. O tensor covariante e o tensor contra-variante podem ser considerados casos especiais do tensor misto.

Tensores simétricos: Um tensor contravariante ou covariante de segunda ordem ou de ordem mais elevada diz-se *simétrico* quando são iguais duas componentes provenientes uma da outra pela permuta de dois índices quaisquer. O tensor $A^{\mu\,\nu}$ ou o $A_{\mu\,\nu}$, é pois simétrico se for para qualquer combinação dos índices, respectivamente

(14) $A^{\mu\,\nu} = A^{\mu\,\nu}$, *ou*
(14 a) $A_{\mu\,\nu} = A_{\mu\,\nu}$

É necessário demonstrar que a simetria assim definida é uma propriedade independente do sistema de referência. Com efeito, de (9) resulta, atendendo a (14),

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'\tau}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'\tau}{\partial x_{\nu}} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'\tau}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'\sigma}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma'}$$

A penúltima igualdade provém da permuta dos índices de soma μ e ν (isto é, de uma simples mudança de notação).

Tensores anti-simétricos: Um tensor contravariante ou covariante de segunda, terceira ou quarta ordens diz-se anti-simétrico quando duas componentes provenientes uma da outra por per-mutação de dois índices quaisquer são *iguais e de sinais contrários.* O tensor $A^{\mu\,\nu}$, *ou o* $A_{\mu\,\nu}$, é pois anti-simétrico sempre que se tenha, respectivamente

(15) $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, *ou*

(15 a) $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$.

Das 16 componentes $A^{\mu\nu}$ reduzem-se a zero as quatro $A^{\mu\mu}$; as restantes são, aos pares, iguais e de sinais contrários, de modo que só há 6 componentes numericamente diferentes (vetor de seis componentes ou sextivector). Do mesmo modo se vê que o tensor anti-simétrico $A^{\mu\nu\sigma}$ (de terceira ordem) só tem quatro componentes numericamente diferentes, o tensor $A^{\mu\nu\sigma t}$ só tem uma, e não há, no contínuo de quatro dimensões, tensores anti-simétricos de ordem superior à quarta.

§ 7 - Multiplicação de tensores

Multiplicação externa de tensores: Com as componentes de um tensor de ordem z e as de um outro de ordem z' podem obter-se as componentes de um tensor de ordem $z + z'$, multiplicando duas a duas todas as componentes do primeiro por todas as componentes do segundo. É assim, que, no exemplo seguinte, se obtêm os tensores T à custa de tensores A e B , de diversas espécies.

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_{\sigma}$$
$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B\gamma^{\delta}$$
$$T_{\alpha\beta}^{\gamma\psi\delta} = A_{\alpha\beta} B\gamma^{\delta}$$

A prova do caráter tensorial dos T resulta diretamente das expressões (8), (10), (12) ou das regras de transformação (9), (11), (13). As equações (8), (10), (12) são em si mesmas exemplos de multiplicação externa (de tensores de primeira ordem).

Contradição de um tensor misto: A partir de qualquer tensor misto pode-se formar um tensor de ordem inferior em 2 unidades à do primeiro, igualando um índice de caráter covariante a um de caráter contravariante e somando em relação a tal índice (" contração") . Assim, por exemplo, do tensor misto de quarta ordem $A_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ obtém-se o tensor de segunda ordem.

$$A_{\beta}^{\delta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \left(= \sum_{\alpha} A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \right)$$

e deste, novamente por contração, o tensor de ordem zero $A_{\beta}^{\delta} = A_{\beta}^{\beta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$

A prova de que o resultado da contração possui realmente caráter tensorial obtém-se com a representação tensorial feita de acordo com a generalização (12) em combinação com (6), ou então por generalização de (13).

Multiplicação interna e mista de tensores: estas operações consistem na combinação da multiplicação externa com a contração.

Exemplos. Com o tensor covariante de segunda ordem $A_{\mu\nu}$, e o tensor contravariante de primeira ordem B^{σ} formamos, por multiplicação externa, o tensor misto

$$D_{\mu\nu}^{\sigma} = A_{\mu\nu} B^{\sigma} .$$

Por contração segundo os índices v , σ forma-se o quadrivetor covariante.

$$D_\mu = D_{\mu v}^{\ \ v} = A_{\mu v}\ B^{\ v}\ .$$

Chamar-lhe-emos produto interno dos tensores $A_{\mu v}$ *e* B^{σ} forma-se, por multiplicação externa e dupla contração, o produto interno $A_{\mu v}\ B^{\mu v}$. Com o resultado da multiplicação externa e uma só contração obtém-se a partir de $A_{\mu v}$ *e* $B^{\sigma\tau}$ o tensor misto de segunda ordem $D_{\mu}^{\ \tau} = A_{\mu v} B^{\mu v}$. Pode-se, adequadamente, designar por mista esta operação, visto que é externa em relação aos índices μ e τ e interna em relação aos índices v e σ.

Vamos agora demonstrar um teorema que se aplica muitas vezes ara verificar o caráter tensorial. Segundo o que acabamos de expor, $A_{\mu v}\ B^{\mu v}$ é um escalar se $A_{\mu v}$ *e* $B^{\sigma\tau}$ forem tensores. Pois vamos agora estabelecer também o seguinte:

Se $A_{\mu v}\ B^{\mu v}$ for um invariante para *toda e qualquer escolha do tensor* $B^{\mu v}$, então $A_{\mu v}$ tem caráter tensorial.

Demonstração:
Tem-se, por hipótese, para uma substituição arbitrária,

$$A_{\sigma\tau}'\ \ B^{\sigma\tau'} = A_{\mu v}\ B^{\mu v}$$

Mas, por inversão de (9)

$$B^{\mu v} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'\alpha}\frac{\partial x_v}{\partial x'_\tau} B^{\sigma\tau'}$$

Substituindo na equação anterior:

$$\left(A_{\sigma\tau'} - \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x v}{\partial x'\tau} A_{\mu v}\right) B^{\sigma\tau} = 0$$

Esta igualdade só pode ser satisfeita, sendo arbitrária a escolha de $B^{\sigma\tau'}$, se a expressão dentro do parêntese for nula. Daqui resulta, atendendo a (11), o teorema que enunciamos.

Pode-se, de modo análogo, demonstrar um teorema correspondente a este para tensores de qualquer ordem e de qualquer caráter.

O mesmo teorema pode ainda demonstrar-se na forma seguinte:

Se B^{μ} *e* $C^{\ v}$ forem vectores arbitrários e se , quaisquer que eles sejam, o produto interno

$$A_{\mu v}\ B^{\mu}\ \ C^{\ v}$$

for um escalar, então $A_{\mu v}$ *é um tensor covariante.*

Podemos estender a validade desta última proposição ao caso mais restrito de a invariância se verificar no produto escalar

$$A_{\mu\nu} \; B^{\mu} \quad B^{\nu}$$

para uma escolha arbitrária do quadrivetor B^{μ} , desde que saibamos que $A_{\mu\nu}$ obedece á condição de simetria $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. Com efeito, prova-se então, seguindo o caminho que acabamos de indicar, que $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$ tem caráter tensorial, donde se segue, por virtude da propriedade da simetria, o caráter tensorial de $A_{\mu\nu}$. Também este teorema se pode generalizar facilmente ao caso de tensores covariantes e contravariantes de qualquer ordem.

Finalmente, resulta do que foi demonstrado o seguinte teorema, que pode igualmente ser generalizado a quaisquer tensores: Se as grandezas $A_{\mu\nu} \; B^{\nu}$ formam um tensor de primeira ordem para uma escolha arbitrária do quadrivetor B^{ν}, então $A_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem. Com efeito, se C^{μ} for um quadrivetor arbitrário, então, por causa do caráter tensorial de $A_{\mu\nu} \; B^{\nu}$, o produto interno $A_{\mu\nu} \; C^{\mu} \quad B^{\nu}$ será um escalar, qualquer que seja a escolha dos quadrivetores C^{μ} e B^{ν}: donde resulta a afirmação feita.

§ 8. Algumas notas sobre o tensor fundamental dos $g_{\mu\nu}$

O tensor fundamental covariante. Na expressão invariante do quadrado do elemento da linha $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_{\mu} \; dx_{y}$, dx_{μ} desempenha o papel de um vector contravariante de escolha arbitrária. E como, além disso, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, segue-se, em conformidade com as considerações do último parágrafo, que $g_{\mu\nu}$ é um tensor covariante de segunda ordem. Chamar-lhe-emos " tensor fundamental". Deduziremos de seguida algumas propriedades deste tensor, que na verdade pertencem a todo o tensor de segunda ordem; mas o papel especial desempenhado pelo tensor fundamental na nossa teoria, que tem os seus fundamentos físicos na peculiaridade das ações gravíticas, faz com que as relações a desenvolver só tenham importância para nós em relação ao tensor fundamental.

O tensor fundamental contravariante. Tomemos no determinante formado com os elementos $g_{\mu\nu}$ o menor correspondente a cada um dos $g_{\mu\nu}$ e dividamo-lo pelo determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ dos $g_{\mu\nu}$: obteremos assim certas grandezas $g^{\mu\nu}$ $(=g^{\mu\nu})$ que, como vamos demonstrar, forma um tensor contravariante.

Segundo uma conhecida propriedade dos determinantes, teremos

$$g^{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\;\nu} \; , \tag{16}$$

onde o símbolo $\delta_{\mu}^{\;\nu}$ significa 1 ou 0, consoante for $\mu = \nu$ ou $\mu \neq \nu$. Em vez da expressão anterior de ds^2 podemos então também escrever

$$g_{\mu\nu} \quad \delta_{\mu}^{\;\nu} \; dx_{\mu} \quad dx_{\nu}$$

ou ainda, , atendendo a (16),

$$g_{\mu\nu} \quad g_{\nu\tau} \quad g^{\sigma\tau} \; {}_{dx\mu} \quad dx_{\nu}$$

Mas, segundo as regras de multiplicação dos parágrafos precedentes, as grandezas

$$d\xi\tau = g_{\sigma\tau}\ dx\mu$$

formam um quadrivetor covariante, que é de escolha arbitrária (dado que o são os $dx\mu$). Introduzindo-o na nossa expressão, obtemos

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\ d\xi_\sigma\ \ d\xi\tau$$

Como isto é um escalar para uma escolha arbitrária do vector $d\xi_\sigma$ $g^{\sigma\tau}$ é por definição simétrico nos índices σ *e* τ, segue-se , de acordo com os resultados do parágrafo precedente, que $g^{\sigma\tau}$ é um tensor contravariante. De (16) resulta ainda que $\delta_\mu{}^\nu$ é também um tensor: chamar-lhe-emos tensor fundamental misto.

Determinante do tensor fundamental. Pela regra de multiplicação dos determinantes, teremos

$$|\ g_{\mu\alpha}\ g^{\alpha\nu}| = |\ g_{\mu\alpha}|\ \ |\ g^{\alpha\nu}|$$

Por outro lado,

$$|\ g_{\mu\alpha}\ g^{\alpha\nu}| = |\ \delta\mu^\nu\ | = 1$$

Donde

(17) $$|\ g_{\mu\nu}|\ \ |\ g^{\mu\nu}| = 1$$

O invariante do volume[7] . Comecemos por determinar a lei de transformação do determinante g = $|\ g_{\mu\nu}|$. Em vista de (11) temos

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right| .$$

[7] No raciocínio que se segue omitem-se por simplicidade, o sinais de integral, que em rigor seriam necessários.

Daqui resulta, aplicando duas vezes a regra da multiplicação de determinantes

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'\sigma}\right| \left|\frac{\partial x\nu}{\partial x'\tau}\right| \left|g_{\mu\nu}\right| = \left|\frac{\partial x\mu}{\partial x'\sigma}\right|^2 g,$$

ou $$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'\sigma}\right| \sqrt{g}\ .$$

Por outro lado, a lei de transformação do elemento

$$d\tau = dx_1\ \ dx_2\ \ dx_3\ \ dx_4$$

é segundo o conhecido teorema de Jacobi

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x\mu}\right| \ d\tau$$

Multiplicando as duas últimas equações, obtém-se

(18) $$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau\ .$$

Em vez de $\sqrt{g}$ introduziremos no que se segue a grandeza $\sqrt{-g}$, que tem sempre valor real, em virtude do caráter hiperbólico do contínuo espaço-tempo. O invariante $\sqrt{-g}\ \ d\tau$ é igual à grandeza do elemento de volume quadridimensional, medido no "sistema de referência local" por meio de barras rígidas e relógios, tal como na teoria da relatividade especial.

Nota sobre o caráter do contínuo espaço-tempo. A nossa suposição de que a teoria da relatividade especial é sempre válida no infinitamente pequeno arrasta consigo a conseqüência de que ds^2 se pode sempre exprimir, de acordo com (1), por meio das grandezas reais $dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_4$. Se designarmos por $d\tau_0$ o elemento de volume "natural" $dx_1,\ dx_2$, $dx_3,\ dx_4,$ teremos então

(18a) $$d\tau_0 = \sqrt{-g}\ .\ d\tau .$$

Se $\sqrt{-g}$ tendesse para zero em determinado local do contínuo quadridimensional, isso significaria que, nesse local, a um volume finito definido com as coordenadas corresponderia um volume "natural" infinitamente pequeno. Admitamos que isso não possa nunca suceder. Nesse caso, g não poderá mudar de sinal: admitiremos, em acordo com a teoria da relatividade especial, que g tem sempre um valor finito negativo. Isto constitui uma hipótese sobre a natureza física do contínuo considerado e, ao mesmo tempo, uma estipulação sobre a escolha das coordenadas.

Mas se — g é sempre positivo e finito, está naturalmente indicado que se faça "a posteriori" uma escolha de coordenadas tal que esta grandeza seja igual a 1. Veremos mais tarde que uma tal limitação imposta à escolha das coordenadas permite chegar a uma simplificação apreciável das leis da natureza. Em vez de (18) , temos então simplesmente

$$d\tau' = d\tau$$

donde, atendendo ao teorema de Jacobi,

(19) $$\left|\frac{\partial x'\sigma}{\partial x_{\mu}}\right| = 1$$

Com esta escolha de coordenadas só são pois admissíveis as substituições de coordenadas que tenham determinante igual a 1.

Seria porém errôneo crer que este passo represente uma renúncia parcial ao postulado da relatividade geral. Não perguntaremos: "quais são as leis da Natureza que são covariantes em relação a todas as transformações cujo determinante é 1? " Perguntamos sim: " quais são as leis da natureza de covariância geral ?" Só depois de as termos estabelecido é que faremos uma escolha particular do sistema de referência par simplificar a sua expressão.

Construção de novos tensores por meio do tensor fundamental . Por meio da multiplicação interna, da multiplicação externa e da multiplicação mista de um tensor pelo tensor fundamental formam-se tensores de outro caráter e de outra ordem.

Exemplos:
$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma} A_{\sigma}$$
$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}$$

Notem-se especialmente as construções seguintes:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta}$$
$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

(" complementos", respectivamente, do tensor covariante e do contravariante), e

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

Chamaremos $B_{\mu\tau}$ o tensor reduzido correspondente a $A_{\mu\tau}$. Analogamente

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$$

Note-se que $g^{\mu\nu}$ não é mais que o complemento de $g_{\mu\nu}$. Com efeito

$$g^{\mu\nu} g^{\nu\beta} g\alpha\beta = g^{\mu\alpha} \delta^{\nu}_{\alpha} = g^{\mu\nu} .$$

§ 9 - Equação da linha geodésica (isto é, do movimento do ponto)

Como o " elemento da linha" ds é uma grandeza definida independentemente do sistema de coordenadas, também a linha traçada entre os dois pontos P_1 *e* P_2 do contínuo quadridimensional para a qual $\int$ d*s* é um extremo (linha geodésica) tem um significado independente da escolha das coordenadas. A sua equação é

(20) $$\delta \left\{ \int_{P1}^{P2} ds \right\} = 0 \ .$$

Partindo desta equação chega-se por um conhecido processo do cálculo das variações a quatro equações diferenciais totais, que determinam esta linha geodésica. Para apresentar o assunto de um modo completo, vamos fazer aqui essa dedução. Seja λ uma função das coordenadas x_v ; esta função define uma família de superfícies que interceptam a linha geodésica procurada, assim como as linhas infinitamente próximas desta que passem pelos pontos P_1 e P_2. Qualquer destas linhas pode então imaginar-se determinada pela expressão das suas coordenadas x_v em função de λ . Suponhamos que o símbolo δ corresponde ao transporte de um ponto da linha geodésica procurada para o ponto de uma curva vizinha que corresponde ao mesmo λ . Nesse caso, poderemos substituir (20) por (20 a)

$$\begin{cases} \int_{\omega 2}^{\lambda 2} \delta w d\lambda = 0 \\ w^2 = g_{\mu v} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_v}{d\lambda} \end{cases}$$

Mas como

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x_\alpha} \frac{dx_\mu}{dx_\lambda} \frac{dx_v}{d\lambda} \delta x \sigma + g_{\mu \sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\sigma}{d\lambda} \right) \right\}$$

resulta, substituindo $\delta\ w$ em (20 a), tendo em conta que

$$\delta \left(\frac{d x \sigma}{d\lambda} \right) = \frac{d \delta x_\sigma}{d\lambda} \ ,$$

e após integração parcial

(20 b) $$\begin{cases} \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} x_\sigma \delta x_\sigma d\lambda = 0 \\ x\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g\mu\alpha}{w} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_v}{d\lambda} \end{cases}$$

Daqui resulta, por ser arbitrária a escolha dos $\delta x\sigma$, que os x_σ se reduzem a zero:

(20c) $x_\sigma = 0.$

Tais são as equações da linha geodésica. Se não for $ds = 0$ sobre a linha geodésica considerada, poderemos tomar como parâmetro λ o " comprimento de arco " *s* medido sobre a linha geodésica. Será então $w = 1$ e, em vez de (20c), teremos:

$$g\ \mu\sigma \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_v} \frac{dx_v}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} - 1 \frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x \sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_v}{ds} = 0$$

ou, com uma simples mudança de notação

(20d) $$g\,\alpha\sigma\;\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\;\frac{dx_\nu}{ds}=0$$

onde se introduziu, seguindo Christoffel

(21) $$\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\sigma}\right).$$

Se, finalmente, multiplicarmos (20d) por g xσ (multiplicação externa em relação a τ e interna em relação a σ), obtém-se para forma definitiva da equação da linha geodésica

(22) $$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx\mu}{ds}\;\frac{dx_\nu}{ds}=\;0$$

na qual se introduziu, seguindo Christoffel

(23) $$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}=g\tau\alpha\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \alpha\end{bmatrix}$$

§ 10 - A construção de tensores por meio de diferenciação

Apoiados na equação da linha geodésica podemos agora deduzir facilmente as leis segundo as quais se podem construir por diferenciação novos tensores a partir doutros. Só então os encontraremos aptos a formular equações diferenciais de covariância geral. Atingiremos este objetivo por aplicação repetida deste simples teorema:

Se, no nosso contínuo, os pontos de uma dada curva forem definidos pela medida *s* do arco ("Bogendistanz ") que os separa de um determinado ponto fixo da curva, e se φ for uma função espacial invariante, então *d*φ */ ds* será também um invariante. A prova está em que tanto dφ como *ds* são invariantes.

Ora, sendo $$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x\mu}\frac{dx\mu}{ds}$$

segue-se que também $$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x\mu}\;\frac{dx\mu}{ds}$$

é um invariante, sendo-o para todas as curvas que partam de um ponto do contínuo, isto é, para uma escolha arbitrária do vector dos dx_μ. Daqui resulta imediatamente que

(24) $$A\mu = \frac{\partial\psi}{\partial x\mu}$$

é um quadrivetor covariante (*gradiente* de φ)

Segundo o nosso teorema, também a derivada tomada sobre uma curva é um invariante. Substituindo ψ pela sua anterior expressão resulta

$$x = \frac{\partial^2 \psi}{dx\mu \ \partial x_\nu} \frac{dx\mu}{ds} \frac{dx\nu}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x\mu} \frac{d^2 x\mu}{ds^2}$$

Daqui não se pode inferir diretamente a existência de um tensor. Mas se estabelecermos agora que a curva sobre a qual se fez a diferenciação é uma linha geodésica, então, por substituição de d^2x_ν / ds^2 pela sua expressão tirada de (22), teremos:

$$x = \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{dx\mu \ \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x\tau} \right\} \frac{dx\mu}{ds} \frac{dx\nu}{ds}$$

Como se pode inverter a ordem das diferenciações em relação a μ e ν e como, segundo (23) e (21), o colchete $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix}$ é simétrico relativamente a μ e ν, segue-se que a expressão entre parênteses também é simétrica em μ e ν . E, como a partir de um ponto do contínuo se pode traçar uma linha geodésica em qualquer direção , sendo portanto dx_μ / ds um quadrivetor de livre escolha da razão de componentes, segue-se, de acordo com os resultados do § 7, que

(25) $$A\mu\nu = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\mu \ dx\nu} - \begin{Bmatrix} \mu \ \nu \\ \tau \end{Bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x\tau}$$

é um tensor covariante de segunda ordem.

Chegamos deste modo ao seguinte resultado:
com o tensor covariante da primeira ordem

$$A \ \mu = \frac{\partial\psi}{\partial x\mu}$$

pode-se construir, por diferenciação, um tensor covariante de segunda ordem

(26) $$A \ \mu = \frac{\partial \ A\mu}{\partial x\nu} - \begin{Bmatrix} \mu \ \nu \\ \tau \end{Bmatrix} A\tau$$

A este tensor $A\mu\nu$ chamaremos a "extensão" (Erweiterung) do tensor $A\mu$.

Poderemos agora mostrar facilmente que o processo de formação de expressões que acabamos de indicar continua a originar tensores quando já não se verifique a condição acima admitida de $A\mu$ poder ser considerado um gradiente.

Para provarmos isso, comecemos por notar que

$$\psi = \frac{\partial \psi}{d\, x\, \mu}$$

é um quadrivetor covariante quando ψ e φ forem escalares. Também assim sucede a uma soma de quatro termos análogos ao anterior.

$$S\,\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x \mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \psi^{(4)}}{\partial x \mu} \; ,$$

desde que $\psi\,(^1)\ \varphi\,(^1)\ \ldots\ \psi\,(^4)\ \varphi\,(^4)$ sejam escalares.

Ora é claro que qualquer quadrivetor covariante se pode representar na forma $S\mu$: com efeitos, se $A\mu$ for um quadrivetor cujas componentes sejam dadas por funções quaisquer dos x_v , bastará tomar (em relação ao sistema de coordenadas escolhido)

$$\begin{array}{ll} \psi\,(^1) = A_1 \; , & \varphi\,(^1) = x_1 \; , \\ \psi\,(^2) = A_2 \; , & \varphi\,(^2) = x_2 \; , \\ \psi\,(^3) = A_3 \; , & \varphi\,(^3) = x_3 \; , \\ \psi\,(^4) = A_4 \; , & \varphi\,(^4) = x_4 \; , \end{array}$$

para se conseguir que $S\mu$ se torne igual a $A\mu$.

Sendo assim, se conseguirmos demonstrar que $A\mu\ v$ é um tensor sempre que, no segundo membro da sua expressão, $A\mu$ represente um quadrivetor da forma $S\mu$, demonstrada ficará a mesma afirmação para o caso de $A\mu$ representar um quadrivetor covariante inteiramente arbitrário.

Ora um rápido exame de (26) mostra que basta fazer a demonstração para o caso de ser

$$A\mu = \psi \frac{\partial \psi}{\partial x \mu}$$

para que fique feita para $S\mu$. Considerando então esse caso, notemos que o produto por φ do segundo membro de (25)

$$\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \mu \;\; d x v} - \begin{Bmatrix} \mu \;\; v \\ \tau \end{Bmatrix} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x \tau}$$

tem caráter tensorial. E

$$\frac{\partial \psi}{\partial x \mu} \frac{\partial \psi}{\partial x \nu}$$

é igualmente um tensor (produto externo de dois quadrivetores). De uma adição resultará então o caráter tensorial de

$$\frac{\partial}{\partial x \nu}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x \mu} \right) - \begin{Bmatrix} \mu \ \nu \\ \tau \end{Bmatrix} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x \tau} \right) .$$

Com isto fica feita a demonstração para o quadrivetor

$$\psi \frac{\partial \psi}{\partial x \mu}$$

com se reconhece imediatamente olhando para (26). E portanto ficará igualmente feita, como se provou, para todo e qualquer quadrivetor $A\mu$.

Recorrendo à extensão do quadrivetor, fácil é definir a "extensão" de um tensor covariante de ordem arbitrária por generalização daquela. Limitar-nos-emos a estabelecer a extensão do tensor de segunda ordem, porque esta deixa já compreender claramente qual é a lei de formação.

Como já foi notado, todo o tensor covariante de segunda ordem pode ser representado por uma soma de tensores do tipo $A\mu \ B\nu$ [8] . Bastará por isso deduzir a fórmula da "extensão" para tensores deste tipo especial.

De acordo com (26), as expressões

$$\frac{\partial A\mu}{\partial x\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma \ \mu \\ \tau \end{Bmatrix} A\tau$$

$$\frac{\partial B\nu}{\partial x\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma \ \nu \\ \tau \end{Bmatrix} B\tau$$

têm caráter tensorial. Multiplicando externamente a primeira por $B\nu$ e a segunda por $A\mu$, obtém-se em cada um dos casos um tensor de terceira ordem; a adição desses tensores dá o tensor, também de terceira ordem,

(27) $$A\mu\nu\sigma = \frac{\partial A\mu\varsigma\nu}{\partial x\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma \ \mu \\ \tau \end{Bmatrix} A\tau\nu - \begin{Bmatrix} \sigma \ \nu \\ \tau \end{Bmatrix} A\mu\tau$$

8 Por multiplicação externa dos vectores que têm respectivamente por componentes A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{14} , e 1, 0, 0, 0, forma-se um tensor com as componentes

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Por adição de quatro tensores deste tipo obtém-se o tensor cujas componentes foram arbitrariamente prefixadas.

onde se pôs $A\mu\ \nu = A\mu\ B\nu$. Como o segundo membro de (27) é linear e homogêneo em relação aos $A\mu\nu$ e suas primeiras derivadas, esta lei de formação conduz a um tensor, não só quando se parte de um tensor do tipo $A\mu\ B\nu$, mas ainda quando se parte de uma soma de tensores desse tipo, isto é, quando se parte de um tensor covariante arbitrário de segunda ordem. Ao tensor $A\mu\ \nu\sigma$ daremos o nome de extensão do tensor $A\mu\ \nu$.

É claro que (26) e (24) exprimem apenas casos especiais de extensão (de tensores de ordem 1 e de ordem), respectivamente). De um modo geral, todas as leis especiais de construção de tensores ordem ser consideradas provenientes de (27) em combinação com multiplicação de tensores.

§ 11. Alguns casos particulares de especial importância

Alguns lema respeitantes ao tensor fundamental.

Vamos agora estabelecer fórmulas que nos hão de ser de grande utilidade no que se segue.

Em virtude da regra da diferenciação de determinantes, tem-se

(28) $$dg = g^{\mu\nu}\ g dg_{\mu\nu} = -g\,\mu\,\nu\ g\, dg^{\mu\nu}$$

A última expressão obtém-se da penúltima, atendendo a que $g\,\mu\,\nu\ g\,\mu'\nu = \delta_{\nu}^{\mu'}$ *onde* $g_{\mu\nu}\ g^{\mu\nu} = 4$ *e por consegu* int *e*

$$g_{\mu\nu}\ g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\ dg\,\mu'\nu = 0$$

De (28) resulta

(29) $$\frac{1}{\sqrt{-g}}\ \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_{\sigma}} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial 1g\,(-g)}{\partial x\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

De $$g_{\mu\sigma}\ g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

resulta, por outro lado, por diferenciação

(30) $$\begin{cases} g\,\mu\nu\, dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma}\ dg_{\mu\sigma} \\ e \quad g\,\mu\nu\ \dfrac{\partial g\,\nu\sigma}{\partial x\gamma} = -\ g^{\nu\sigma}\ \dfrac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x\lambda} \end{cases}$$

Efetuado o produto misto por $g^{\sigma\tau}$ e $g\nu\lambda$, respectivamente, obtém-se (modificando a notação dos índices)

(31) $$\begin{cases} dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}\ dg\alpha\beta \quad , \\ \dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} = -\ g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}\ \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} \end{cases}$$

e correspondentemente

(32)
$$\begin{cases} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, dg^{\alpha\beta} \;, \\ \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\, g_{\mu\alpha}\;\; g_{\nu\beta}\; \dfrac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{cases}$$

A relação (31) é susceptível de uma transformação que também havemos de utilizar muitas vezes. Segundo (21), temos

(33)
$$\frac{\partial\, g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma]}} = \begin{bmatrix} \alpha\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\,\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Introduzindo esta relação na segunda das fórmulas (31) obtém-se, atendendo a (23),

(34)
$$\frac{\partial\, g^{\mu\tau}}{\partial\, x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\,\sigma \\ \nu \end{Bmatrix} + g^{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\,\sigma \\ \mu \end{Bmatrix} \right)$$

Introduzindo agora em (29) o segundo membro desta relação (34), vem

(29 a)
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\;\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\,\sigma \\ \mu \end{Bmatrix}$$

"*Divergência" do quadrivetor contravariante.* Se multiplicarmos (26) pelo tensor fundamental contravariante $g^{\mu\nu}$ (multiplicação interna), o segundo membro tomará a seguinte forma, depois de transformado o seu primeiro termo 1):

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\mu\nu} A_\mu\right) - A_\mu\, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\alpha} \right) g^{\mu\nu}\, A_\tau$$

O último dos três termos desta expressão pode, atendendo a (31) e (29), escrever-se com a forma

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\mu}\, A_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu} A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\; g^{\tau\alpha}\;\; A_\tau \quad 2)$$

Como a denominação dos índices de soma se pode modificar livremente, os dois primeiros termos desta última expressão são cancelados pelo segundo termo da penúltima; e o terceiro termo da última pode reduzir-se com o primeiro da penúltima 3). Se depois fizermos

$$g^{\mu\nu} A\mu = A^\nu \;,$$

onde A^ν bem como $A\mu$, designa um vector arbitrário, obteremos finalmente

(35) $$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \ A^\nu$$

Este escalar é a *divergência* do quadrivetor contravariante $A\nu$.

"Rotacinal " do quadrivetor (covariante).

O segundo termo de (26) é simétrico em relação aos índices μ e ν . Daqui resulta a possibilidade da construção de um novo tensor (anti-simétrico) de maneira particularmente simples: o tensor $A\mu\, \nu$ —$A\, \nu\mu$. Representando-o por $B\mu\, \nu$, teremos então

(36) $$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_{\varsigma x}} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$$

Extensão anti-simétrica de um sextivetor.

Se aplicarmos (27) a um tensor anti-simétrico de segunda ordem , $A\mu\, \nu$, e se somarmos à equação assim obtida as duas equações que provêm dela por permutação circular dos índices μ , ν, τ , chegaremos ao tensor de terceira ordem

(37) $$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{d\, x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\gamma}$$

que é anti-simétrico, como facilmente se prova.

Divergência do sextivetor.

Se multiplicarmos (27) por $g^{\mu\alpha}\ g^{y\beta}$ (multiplicação mista), obteremos ainda um tensor. O primeiro termo do segundo membro de (27) pode 4) escrever-se na forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} A\mu\nu - g^{\nu\beta} \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma} A\mu\nu$$

Substituindo $g^{\mu\alpha}\ g^{y\beta}\ A\mu\, \nu\sigma$ por $A^{\alpha\beta}_{\sigma}$, *e* $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}$ *por* $A^{\alpha\beta}$; *e* substituindo ainda, no primeiro termo já transformado,

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \ \ e \ \ \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

pelas suas expressões (34), obtém-se a partir do segundo membro de (27) uma expressão de sete termos, quatro dos quais se cancelam entre si. Resta então

(38) $$A^{\alpha\beta}_{\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \left\{ {\sigma x \atop \alpha} \right\} A^{x\beta} + \left\{ {\sigma x \atop \beta} \right\} A^{\alpha x}$$

Tal é a expressão da extensão de um tensor contravariante de segunda ordem: expressões correspondentes a esta podem-se estabelecer para tensores contravariantes de ordem mais alta e mais baixa. E é de notar que, seguindo um processo análogo, se pode também chegar à extensão de u tensor misto:

(39) $$A^{\alpha}_{\mu\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma\mu \atop \tau} \right\} A^{\alpha}_{\tau} + \left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\} A^{\tau}_{\mu}$$

Por contração de (38) em relação aos índices β e σ (multiplicação interna por δ^{α}_{β} , obtém-se o quadrivetor contravariante

$$A^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial^{x\beta}} + \left\{ {\beta x \atop \beta} \right\} A^{\alpha x} + \left\{ {\beta x \atop \alpha} \right\} A^{xB}.$$

Dada a simetria de $\left\{ {\beta x \atop \alpha} \right\}$ em relação aos índices β e x , o terceiro termo do segundo membro reduz-se a zero se $A^{\sigma\beta}$ for um tensor anti-simétrico, o que vamos admitir; por outro lado, o segundo termo pode ser transformado por aplicação de (29 a) . Obtém-se assim

(40) $$A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, A^{\alpha\beta} \right)}{\partial^{x\beta}}$$

É esta a expressão da divergência de um sextivetor contravariante.

Divergência do tensor misto de segunda ordem.

Efetuando a contração de (39) em relação aos índices α e σ , obteremos, atendendo a (29 a).

(41) $$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\mu} \right)}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma\mu \atop \tau} \right\} \sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\tau}$$

Introduzindo no último termo o tensor contravariante $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau} A^{\sigma}$, ele tomará a forma

$$- \left[{\sigma\mu \atop \rho} \right] \sqrt{-g}\, A^{\rho\sigma}$$

Se o tensor $A^{\rho\sigma}$ for simétrico, a expressão anterior reduzir-se-á a

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A^{\rho\sigma}$$

Se, em vez de $A^{\rho\sigma}$, se tivesse introduzido o tensor covariante, igualmente simétrico , $A_{\rho\sigma} = g\rho\alpha\, g^{\sigma\beta}$, então o último termo teria tomado, em virtude de (31), a forma

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}} A_{\rho\sigma}$$

Assim, no caso de simetria considerado, (41) pode substituir-se por qualquer das formas

(41 a) $$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;\; A_{\mu}^{\sigma}\right)}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{d x_{\mu}}\,\sqrt{-g}\;\; A^{\rho\sigma} \qquad e$$

(41 b) $$\sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\;\; A_{\mu}^{\sigma}\right)}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{d x_{\mu}}\,\sqrt{-g}\;\; A_{\rho\sigma}$$

que havemos de aplicar mais tarde.

§ 12. O tensor de Riemann-Christoffel

Vamos agora investigar quais são os tensores que se podem formar por diferenciação, utilizando como ponto de partida *somente* o tensor fundamental dos $g\mu\,\nu$. A resposta parece à primeira vista muito fácil. Basta substituir em (27) o tensor arbitrário $A\mu\,\nu$ pelo tensor fundamental dos $g^{\mu\,\nu}$ para se obter um novo tensor, que é a extensão do tensor fundamental. Mas é fácil chegar à convicção de que tal tensor é identicamente nulo. Poderemos, no entanto, atingir o objetivo em vista seguindo o caminho que se vai expor. Introduzamos em (27).

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \left\{ {\mu\nu \atop \rho} \right\} A_{\rho}$$

isto é, a extensão do quadrivetor $A\mu$. Obtém-se então (com uma pequena modificação nos nomes dos índices) o tensor de terceira ordem

$$\begin{aligned} A_{\mu\sigma\tau} &= \frac{\partial^{2} A_{\mu}}{\partial x_{\sigma}\,\partial x_{\tau}} \\ &- \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\tau}} - \left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma\tau \atop \rho} \right\} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\rho}} \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} + \left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\} + \left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\mu \atop \rho} \right\} \right] A_{\rho} \end{aligned}$$

Esta expressão sugere a construção do tensor $A\mu\sigma\tau$ — $A\mu\tau\sigma$, visto que, nessa construção, o primeiro termo da expressão de $A\mu\sigma\tau$, o quarto termo, e também o termo correspondente à última parcela do parêntese reto, são cancelados pelos termos da mesma ordem da expressão de $A\mu\tau\sigma$, dado que todos esses termos são simétricos em σ e τ. E o mesmo acontece com a soma do segundo e terceiro termos. Obtemos assim

(42) $$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}\;\; A_{\rho}$$

(43) $$\left\{ \begin{aligned} B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = &- \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\} \\ &- \left\{ {\mu\sigma \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\tau \atop \rho} \right\} + \left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\} \end{aligned} \right.$$

O que há de essencial neste resultado é que no segundo membro de (42) entra apenas os $A\rho$ e não já as suas derivadas. Do caráter tensorial de $A\mu\sigma\tau$ — $A\mu\tau\sigma$, em conjunção com o fato de $A\rho$ ser um quadrivetor de escolha arbitrária, resulta, tendo em vista as conclusões de § 7, que $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ é um tensor (tensor de Riemann-Christoffel).

A importância matemática deste tensor provém do seguinte. Quando o contínuo é constituído de tal modo que existe um sistema de coordenadas em relação ao qual os $g_{\mu\nu}$ são constantes, então todos os $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ [5]) se reduzem a zero. Se substituirmos o sistema de coordenadas original por um novo sistema, arbitrário, os $g_{\mu\nu}$ referidos a este já não serão constantes; mas o caráter tensorial de $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ [5]) arrasta consigo a conseqüência de estas componentes continuarem a ser todas nulas no sistema de referência arbitrário. O anulamento do tensor de Riemann é assim uma condição necessária para se obter a constância dos $g_{\mu\nu}$ mediante uma escolha apropriada do sistema de referência[9]). No nosso problema isto correpsonde a conseguir a validade da teoria da relatividade especial num domínio finito mediante uma escolha conveniente do sistema de coordenadas.

Por contração de (43) em relação aos índices τ e ρ, obtém-se o tensor covariante de segunda ordem

$$(44)\qquad \begin{cases} B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} = -\dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left\{ {\mu\alpha \atop \alpha} \right\} + \left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\}\left\{ {\nu\beta \atop \alpha} \right\} \\ S_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^{2} 1g\sqrt{-g}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}\dfrac{\partial 1g\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}} \end{cases}$$

Observação sobre a escolha das coordenadas. Já foi notado no § 8, a propósito da equação (18 a) , que há vantagem em escolher o sistema de coordenadas por forma a tornar $\sqrt{-g} = 1$. Um rápido exame das equações obtidas nos dois últimos parágrafos mostra que, com essa escolha, as leis de formação de tensores sofrem uma simplificação notável. Isto aplica-se em particular ao tensor $B\mu\nu$ que acabamos de desenvolver, o qual vai desempenhar , o qual vai desempenhar um papel fundamental na teoria que vamos apresentar. Com efeito, a escolha do sistema especial de coordenadas que vimos referindo origina o anulamento de $S\,\mu\nu$, e isso reduz o tensor $B\mu\nu$ a $R\mu\nu$.

---
[9] Os matemáticos demonstraram que esta condição é também *suficiente*.

Por este motivo, todas as relações serão daqui em diante apresentadas na forma simplificada a que a referida escolha particular de coordenadas conduz. E depois fácil voltar às equações covariantes *gerais*, se isso se mostrar conveniente num caso particular.

C - Teoria do campo gravitacional

§ 13 - Equação do movimento do ponto material no campo gravitacional. Expressão das componentes desse campo

Segundo a teoria da relatividade especial, um corpo que se move livremente, sem sujeição a forças exteriores. fá-lo em movimento retilíneo e uniforme. Esta afirmação continua a ser válida na teoria da relatividade geral, para uma porção do espaço quadridimensional em que seja possível escolher o sistema de coordenadas K_o — e se escolha de fato — de tal modo que os $g\mu\nu$ tomem os valores constantes dados em (4).

Mas consideremos agora o mesmo movimento a partir de um sistema de coordenadas de escolha arbitrária K_1 ; apreciado de tal sistema ele apresenta-se como movimento efetuado num campo de gravidade, de acordo com as reflexões expostas no § 2. A lei deste movimento em relação a K_1 estabelece-se facilmente com o raciocínio seguinte:

Em relação a K_0 , a lei do movimento é representada por uma reta quadridimensional, isto é, por uma linha geodésica. Ora a linha geodésica tem uma definição independente do sistema de referência; logo, a sua equação é também a equação do movimento do ponto em relação a K_1 . Pondo

(45) $$I^{\tau}_{\mu\nu} = -\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$$

teremos então, como equação do movimento do ponto em relação a K_1 .

(46) $$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = I^{\tau}_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$

Admitimos agora a hipótese, muito plausível, de que este sistema de equações, que goza de covariância geral, continua a determinar o movimento do ponto no campo gravitacional mesmo no caso de não existir nenhum sistema de referência K_o em relação ao qual a teoria da relatividade especial seja válida para regiões finitas. O fato de em (46) não entrarem senão *primeiras* derivadas, dos $g\mu\nu$ justifica ainda mais que adaptemos tal hipótese, visto que entre as primeiras derivadas não há quaisquer relações, nem mesmo no caso de existir K_0 .[10]

Se os $I'^{\tau}_{\mu\nu}$ se reduzem a zero, o movimento do ponto será retilíneo e uniforme; logo, são essas as grandezas que fazem com que o movimento se afaste da uniformidade: são elas as componentes do campo gravitacional.

[10] É somente nas segundas derivadas (relacionadas com as primeiras) que, segundo o § 12, aparecem as relações $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$. Sendo assim, as equações (46) em que só entram primeiras derivadas devem ter um significado independente da existência ou não existência do K_0 (N.T.)

§ 14. As equações do campo gravitacional na ausência de matéria

Na distinção que a seguir vamos fazer entre "campo gravitacional" e "matéria", daremos a este último termo o significado de tudo quanto não for campo de gravidade, incluindo assim, dentro dele, não só aquilo que vulgarmente se entende por matéria, mas também o campo eletromagnético.

O problema que vamos agora resolver é o de estabelecer as equações de campo da gravidade na ausência de matéria. para isso, vamos outra vez aplicar o método que seguimos no parágrafo anterior para estabelecer a equação do movimento do ponto material.

Notemos então que as equações de campo que estamos procurando devem sempre ser verificadas quando se dê o caso particular de a teoria primitiva da relatividade poder ser aplicada, isto é, quando os $g_{\mu\nu}$ tomarem certos valores constantes. Admitamos que esse caso se dá em determinado domínio finito, desde que se adapte como sistema de referência um certo sistema de coordenadas K_0 . Em relação a esse sistema, todas as componentes $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ do tensor de Riemann se reduzem a zero ao mesmo tempo [equação (43)]; e então, para o referido domínio, essas componentes serão igualmente nulas relativamente a qualquer outro sistema de coordenadas que seja adaptado.

Sendo assim, as equações que vimos a procurar estabelecer para o campo gravitacional vazio de matéria devem verificar-se sempre que sejam nulos todos os $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Mas esta condição suficiente não é certamente necessária: para o reconhecermos claramente, basta notar que deve ser impossível escolher um sistema de coordenadas capaz de "eliminar por transformação " o campo gravitacional criado por um ponto material à sua volta, isto é, capaz de transformar por forma que os $g_{\mu\nu}$ fiquem constantes [6]).

Somos deste modo levados a pensar que a condição exigida pelo campo gravitacional vazio de matéria deve ser o desvanecimento do tensor simétrico $B_{\mu\nu}$ que se obtém contraindo o tensor $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Chegamos assim a 10 equação grandezas $g_{\mu\nu}$. O caso de serem nulos todos os $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ é um caso especial da verificação dessas equações.

Com o sistema de coordenadas que atrás decidimos adaptar[7]) vê-se , atendendo a (44), que as mesmas equações tomam a forma.

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + T^{\ \alpha}_{\mu\beta}\ T^{\ \omega\beta}_{\nu\beta} = 0 \\ \sqrt{-g} = 1 \end{cases}$$

É de salientar quanto é pequeno o grau de arbitrariedade envolvido na escolha das equações: com efeito, à excepção de $B_{\mu\nu}$, não existe nenhum tensor de segunda ordem que, sendo construído com os $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas, não contenha derivadas de ordem superior à segunda e seja linear nas derivadas de segunda.[11]

[11] Em rigor esta afirmação só pode fazer-se para o tensor $B\mu\nu + \lambda g\mu\nu$ ($g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$) , onde λ é uma constante. Mas, se igualarmos a zero este tensor, obteremos outra vez as equações $B\mu\nu = 0$.

As equações a que acabamos de chegar, combinadas com as equações (46) do movimento, conduzem em primeira aproximação à lei de atração de Newton, e em segunda aproximação à explicação do movimento do periélio de Mercúrio descoberto por Leverrier (tal como ele se apresenta depois de feitas as correções de perturbação). Este fato, tendo em vista que as equações foram estabelecidas por via puramente matemática a partir do postulado da relatividade geral, constitui, na minha opinião, testemunho convincente de que a teoria é válida do ponto de vista físico.

§ 15 - A função de Hamilton para o campo gravitacional. Lei da impulsão-energia

Para mostrar que as equações de campo correspondem à lei da impulsão-energia é da maior conveniência escrevê-las na seguinte forma de Hamilto:

(47 a)
$$\begin{cases} \delta \left\{ \int H d\tau \right\} = 0 \\ H = g^{\mu\nu} T^{\alpha}_{\mu\beta} T^{\beta}_{\nu\alpha} \\ \qquad \sqrt{-g} = 1 \end{cases}$$

entendendo-se que as variações se desvanecem nos limites do espaço quadridimensional de integração limitado que se considera.

Comecemos por mostrar que a forma (47 a) é equivalente às (47) . Para esse efeito, consideremos H como função dos $g^{\mu\nu}$ e dos

$$g^{\mu\nu}_{\sigma} \left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \right)$$

temos então, em primeiro lugar,

$$\begin{aligned} \delta H &= T^{\alpha}_{\mu\beta} \delta^{\beta}_{\nu\alpha} + 2g^{\mu\nu} T^{\alpha}_{\mu\beta} \delta^{\beta}_{\nu\alpha} \\ &= - T^{\alpha}_{\mu\beta} T^{\beta}_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu} + 2T^{\alpha}_{\mu\beta} \delta\left(g^{\beta}_{\mu\nu}\right) \end{aligned}$$

Mas agora

$$\delta\left(g^{\mu\nu} T^{\beta}_{\nu\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\delta \left[g^{\mu\nu} g^{\beta\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x \nu} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x \lambda} \right) \right]$$

Os termos provenientes das duas últimas parcelas do parêntese curvo convertem-se um no outro trocando o sinal e permutando os índices μ e β (e atendendo que a denominação dos índices de soma pode ser modificada livremente). Na expressão de δH os referidos termos aparecem multiplicados por $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ e por isso cancelam-se mutuamente, visto que $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ é simétrica em relação a μ e β . Resta, portanto, para ser considerado, apenas o primeiro termo do parêntese curvo, pelo que se obtém, atendendo a (31).

$$\delta H = -T^{\alpha}_{\mu\beta} T^{\beta}_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu} + T^{\alpha}_{\mu\beta} \delta g_{\alpha}{}^{\mu\beta}$$

e portanto

(48)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta H}{\partial g^{\mu\nu}} = - T^{\alpha}_{\mu\beta} T^{\beta}_{\nu\alpha} \\ \dfrac{\delta H}{\partial g_{\sigma}{}^{\mu\nu}} = T^{\beta}_{\mu\nu} \end{cases}$$

Ora o cálculo da variação que figura em (47 a) leva ao sistema de equação [8)]

(47b) $$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

Este sistema, em vista de (48), coincide com (47), como se queria demonstrar.

Multipliquemos agora (47b) por $g^{\mu\nu}_{\alpha}$. Como

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_\sigma}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}{\partial x_\sigma}$$

e, consequentemente,

$$g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\frac{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}{\partial x_\sigma}$$

obteremos com essa multiplicação a equação.

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = 0$$

ou[12]

(49) $$\begin{cases} \dfrac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha} = 0 \\ -2xt^\alpha_\sigma = g^{\mu\nu}_\sigma \dfrac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} - \delta^\alpha_\sigma H \end{cases}$$

sendo ainda, em vista de (48), da segunda equação de (47 a), e de (34),

(50) $$xt^\alpha_\sigma = \frac{1}{2}\delta^\alpha_\sigma g^{\mu\nu} T^\beta_{\mu\lambda} T^\beta_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} T^\lambda_{\mu\beta} T^\beta_{\nu\lambda}$$

É de salientar que t^α_σ não é um tensor, mas que, apesar disso, a equação (49) é válida em todos os sistemas de coordenadas para os quais seja $\sqrt{-g} = 1$. Esta equação exprime a lei da conservação da quantidade de movimento e da energia para o campo gravitacional. Com efeito, a sua integração estendida a um volume *V tridimensional* fornece-nos as quatro equações.

(49 a) $$\frac{\partial}{\partial x_4}\left\{\int t^4_\sigma\, dV\right\} = \int \left(t^1_\sigma a_1 + t^2_\sigma a_2 + t^3_\sigma a_3\right) dS$$

onde a_1, a_2, a_3, representam os co-senos diretores da normal, dirigida para o interior, a um elemento de superfície de grandeza *dS* (no sentido da geometria euclidiana) pertencente à fronteira do volume de integração. Reconhece-se aqui a expressão das leis de conservação na sua forma habitual. Designaremos as grandezas t^α_σ por "componentes de energia" do campo gravitacional.

Vou agora apresentar ainda as equações (47) numa terceira forma que é particularmente útil para uma apreensão viva do nosso assunto. Multiplicando as equações de campo (47) por $g^{\nu\sigma}$, obtemo-las em forma "mista". Note-se agora que

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial T^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\sigma}T^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_{\alpha}}-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_{\alpha}}T^{\alpha}_{\mu\nu}$$

grandeza que, em vista de (34) é igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\sigma}T^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-g^{\nu\beta}T^{\sigma}_{\alpha\beta}T^{\alpha}_{\mu\nu}-g^{\sigma\beta}T^{\nu}_{\beta\alpha}T^{\alpha}_{\mu\nu}$$

ou (modificando a denominação dos índices de soma) igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\beta}T^{\alpha}_{\mu\beta}\right)-g^{mn}T^{\sigma}_{m\beta}T^{\alpha}_{n\mu}-g^{\nu\sigma}T^{\alpha}_{\mu\beta}T^{\alpha}_{\mu\nu}$$

O terceiro termo desta expressão cancela-se com o que provém do segundo termo das equações de campo (47); e usando a relação (50) podemos substituir o segundo termo da expressão por

$$x\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right)$$

onde se tomou $t = t^{\alpha}_{\sigma}$. Obteremos assim, em vez das equações (47),

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\sigma\beta}T^{\alpha}_{\mu\beta}\right)=-x\left(t^{\sigma}_{\mu}-\dfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right)\\ \sqrt{-g}=1\end{cases}\tag{51}$$

§ 16 . Forma geral das equações de campo da gravitação

As equações de campo estabelecidas no parágrafo precedente para espaços livres de matéria correspondem à equação de campo.

$$\Delta\varphi = 0$$

da teoria de Newton. Temos agora de procurar a equação que corresponde à equação que corresponde à equação de Poisson.

$$\Delta\varphi = 4\,\pi\,x\,\rho$$

na qual ρ representa a densidade da matéria.

A teoria da relatividade especial levou à conclusão de que a massa inerte não é do que energia, cuja expressão matemática completa se encontra num tensor simétrico de segunda ordem - o tensor energia. Isto indica-nos que também na teoria da relatividade geral nós teremos de introduzir um ten sor energia da matéria, $T = t^{\alpha}{}_{\sigma}$, o qual há de ter caráter misto, como as componentes $t^{\alpha}{}_{\sigma}$ da energia do campo gravitacional [equação (49) e (50)], mas há de corresponder a um tensor simétrico covarinte.[12]

Quanto à maneira de introduzir nas equações do campo gravitacional o referido tensor (corresponde à densidade ρ na equação de Poission), temos para isso uma indicação nas equações do sistema (51). Consideremos, com efeito, um sistema completo (por exemplo, o sistema solar): a massa total desse sistema, e portanto também o seu efeito gravitacional global, deve depender da energia total do sistema, ou seja, das suas energias ponderável e gravítica em conjunto. isto exprime-se-á introduzindo nas equações (51), em vez das componentes de energia $t^{\alpha}{}_{\sigma}$, que somente se referem ao campo gravitacional, as somas $t^{\alpha}{}_{\sigma} + T^{\alpha}{}_{\sigma}$ das componentes de energia do campo gravitacional e da matéria. Deste modo, em vez de (51), obtém-se a equação tensorial.

(52)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\sigma\beta} T^{\alpha}_{\mu\beta}\right) = -x\left[\left(t^{\sigma}_{\mu} + T^{\sigma}_{\mu}\right) - \dfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}\left(t+T\right)\right] \\ \sqrt{-g} = 1 \end{cases}$$

onde se pôs $T = T^{\mu}{}_{\mu}$ (escalar de Laue). São estas, em forma mista, as equações gerais de campo da gravitação que procurávamos.

Destas equações pode obter-se, seguindo uma marcha inversa daquela que os fez chegar a (51), o seguinte sistema, que substitui (47):

(53)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial T^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + T^{\alpha}_{\mu\beta}\, T^{\beta}_{\nu\alpha} = -x\left(T_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \\ \sqrt{-g = 1} \end{cases}$$

Deve salientar-se que o postulado da relatividade não é, só por si, suficiente para justificar a atribuição de um tensor energia à matéria; e foi por isso que, ao fazermos atrás a introdução desse tensor, a baseamos na hipótese de que a energia do campo da gravidade e a energia de qualquer ou— espécie atuam graviticamente de igual modo. mas a razão mais forte para que aceitemos as equações precedentes está em que elas acarretam a seguinte conseqüência, como se vai mostrar no § 17: para as componentes da energia total vigoram equações de conservação (da quantidade de movimento e da energia) correspondentes exatamente às equações (49) e (49 a).

[12] A razão por que se introduz o fator — 2x será apresentada mais tarde.

§ 17 - As leis de conservação no caso geral

É fácil transformar a equação (52) para fazer desaparecer o segundo termo do seu segundo membro. Efetuemos para isso em (52) uma contração relativamente aos índices μ e σ ; multipliquemos por $\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}$ a equação que assim se obtém, e subtraiamo-la depois de (52). Resulta

(52 a) $$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\sigma\beta}T^{\alpha}_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}g^{\lambda\beta}T^{\alpha}_{\lambda\beta}\right)=-x\left(t^{\sigma}_{\mu}+T^{\sigma}_{\mu}\right)$$

Apliquemos a esta equação a operação $\partial / \partial x_{\sigma}$.

Começando pelo primeiro termo do primeiro membro, temos

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\sigma}}\left(g^{\sigma\beta}T^{\alpha}_{\mu\beta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\sigma}}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

A primeira e a terceira parcela deste parêntese curvo contribuem para o resultado, com termos que se cancelam mutuamente, como imediatamente se reconhece se na contribuição dada pela terceira parcela se permutarem, por um lado, os índices de soma α e σ, e por outro os índices de soma β e λ . Resta então o termo proveniente da segunda parcela. Transformando-o por aplicação de (31), vem então como resultado da aplicação da operação $\partial / \partial x_{\sigma}$ ao primeiro termo do primeiro membro da (52 a).

(54) $$\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\sigma}}\left(g^{\sigma\beta}T^{\alpha}_{\mu\beta}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^{3}g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}\partial x_{\mu}}$$

Quanto ao segundo termo do mesmo primeiro membro, ele dá diretamente.

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\mu}}\left(g^{\lambda\beta}T^{\alpha}_{\lambda\beta}\right)$$

ou $$\frac{1}{4}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\mu}}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g\delta\lambda}{\partial x\beta}+\frac{\partial g\delta\beta}{\partial x\lambda}-\frac{\partial g\lambda\beta}{\partial x\delta}\right)\right]$$

Mas o termo formado com a última parcela deste parêntese curvo desaparece no sistema de coordenadas que estamos a empregar, como se reconhece considerando (29). E os dois restantes termos podem ser reunidos num só, dando, em virtude de (31).

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^{3}g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}\partial x_{\mu}}$$

Combinando este resultado com (54), vê-se então que a aplicação da operação $\partial / \partial x_{\sigma}$ ao primeiro membro de (52 a) conduz à identidade

(55) $$\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\sigma}}\left(g^{\rho\beta}T^{\alpha}_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}g^{\lambda\beta}T^{\alpha}_{\lambda\beta}\right)\equiv 0$$

E então a aplicação da operação $\partial / \partial x_{\sigma}$ à equação (52 a) conduz finalmente a

(56) $$\frac{\partial\left(T_{\mu}^{\sigma}+T_{\mu}^{\sigma}\right)}{\partial x_{\sigma}}=0$$

Daqui se conclui que as nossas equações de campo para a gravitação implicam o cumprimento das leis de conservação da quantidade de movimento e da energia. Reconheceremos isso com a maior facilidade se retomarmos o raciocínio eu nos conduziu de (49) a (49 a), com a diferença, porém, de que agora teremos de tomar, em vez das componentes t_{μ}^{σ} da energia do campo gravitacional, as componentes da energia total da matéria e campo gravitacional.

§ 18 - A lei da impulsão-energia para a matéria considerada como conseqüência das equações de campo

Multiplicando (53) por $\partial g^{\mu\upsilon} / \partial x_{\sigma}$, obtém-se, com o método introduzido no **§** 15, e tendo em conta o anulamento de $g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$ 9)

a equação $$\frac{\partial t_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}T_{\mu\nu}=0$$

ou, atendendo a (56),

(57) $$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}T_{\mu\nu}=0$$

O confronto com (41 b) mostra que esta equação, com a escolha de coordenadas que adaptamos, outra coisa não é senão a expressão do anulamento da divergência do tensor formado pelas componentes energéticas da matéria. Do ponto de vista físico, a presença do segundo termo do primeiro membro mostra que em rigor a lei da conservação da quantidade de movimento e energia não é válida quando se considera a matéria só, ou antes, só é válida nesse caso desde que os $g^{\mu\upsilon}$ sejam constantes, isto é, desde que se desvaneçam as intensidade de campo da gravitação. Este segundo termo exprime, consoante as coordenadas, ou a quantidade de movimento que é transferido do campo gravitacional para a matéria, por cada unidade de volume, ou a energia que é transferida por cada unidade de tempo. Isto ressalta com maior clareza ainda se, por sugestão de (41), escrevermos (57) na forma

(57 a) $$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}=-T_{\beta}^{\alpha}$$

Assim escrito, o segundo membro exprime o efeito energético do campo gravitacional sobre a matéria.]]

Em face do exposto, vemos que as equações de campo da gravitação contêm quatro condições, às quais o processo material tem que satisfazer simultaneamente, Tais condições determinam completamente as equações que regem o processo, caso ele possa ser caracterizado por quatro equações diferenciais mutuamente independentes.[13]

D. OS PROCESSOS " MATERIAIS"

Os instrumentos matemáticos desenvolvidos em *B* proporcionam-nos a possibilidade de, sem ter de recorrer a outros meios, proceder a um alargamento dos enunciados das leis físicas da matéria (hidrodinâmica, electrodinâmica de Maxwell) — tal como são formulados na teoria da relatividade especial — com o fim de os adaptar à teoria da relatividade geral. Com essa adaptação, o que se vai obter não é uma nova limitação de possibilidades imposta pelo princípio da relatividade geral, mas sim um conhecimento exato da influência que o campo gravitacional exerce sobre todos os processos, e isto independentemente da introdução de qualquer nova hipótese.

Pôr o problema deste modo implica que não se introduzam como necessárias hipóteses concretas a respeito da natureza física da matéria (tomada no seu sentido restrito). Pode em particular ficar em aberto a questão de se saber se as teorias dos campos electromagnético e gravitacional formam
ou não, no seu conjunto, uma base suficiente para a teoria da matéria. O postulado da relatividade geral nada pode, em princípio, ensinar-mos a este respeito. Será o desenvolvimento da teoria que há-de revelar se as doutrinas electromagnética e da gravitação serão capazes de realizar, em conjunto, aquilo que a primeira não foi capaz de realizar sozinha.

§ 19 - Equações de Euler para fluidos adiabáticos desprovidos de atrito

Sejam p e ρ dois escalares, ao primeiro dos quais chamaremos " pressão" e ao segundo " densidade" de um fluido; e suponhamos que eles estão relacionados por uma equação. Suponhamos ainda que o tensor contravariante da energia do fluído é o tensor simétrico contravariante

(58) $$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + p \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}$$

Corresponde-lhe o tensor covariante

(58 a) $$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} p + g_{\mu\alpha}\frac{d x_\alpha}{ds} g_{\nu\beta}\frac{dx_\beta}{ds} p$$

[13] Sobre este assunto consulte D. Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1915, pág. 3.

assim como o tensor misto[14]

(58 b) $$T_{\sigma}^{\alpha} = -\delta_{\sigma}^{\alpha} p + g_{\sigma\beta} \frac{dx_{\beta}}{ds} \frac{dx_{\alpha}}{ds} p$$

Introduzindo o segundo membro de (58 b) em (57 a) , obtêm-se as equações hidrodinâmicas de Euler da teoria da relatividade geral. Estas equações dão, em princípio, uma solução completa ao problema do movimento; porque as quatro equações (57 a), conjuntamente com a equação dada entre p e ρ e ainda com a equação

$$g_{\alpha\beta} = \frac{dx_{\alpha}}{ds} \frac{dx\beta}{ds} = 1$$

são suficientes, dados os $g_{\alpha\beta}$, para determinar as 6 incógnitas

$$p, p, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds}$$

Se os $g_{\mu\nu}$ forem também desconhecidos, será necessário lançar ainda mão das equações (53). Como estas são em número de 11 e as funções $g_{\mu\nu}$ são só 10, parece à primeira vista haver superabundância de condições, mas há que ter em conta que as equações (57 a) estão já incluídas entre as (53), de modo que estas, no sistema, representam apenas 7 equações independentes. O que resta, pois, é uma indeterminação, que é aliás bem fácil justificar: é que a larga liberdade de que se dispõe para escolher as coordenadas introduz no problema um tal grau de indeterminação matemática , que se torna
possível escolher arbitrariamente três das funções espaciais.[14]

§ 20 - Equações electromagnéticas de Maxwell para o vazio

Sejam φ_{ν} as componentes de um quadrivetor covariante, o quadrivetor do potencial eletromagnético . Seguindo (36) , formemos com elas as componentes $F_{\rho\sigma}$ do sextivector covariante do campo electromagnético, mediante o sistema de equações

(59) $$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi \rho}{\partial x_{\sigma}} - \frac{\partial \varphi_{\sigma}}{\partial x_{\rho}}$$

O sistema (59) implica que seja satisfeito o sistema

(60) $$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_{\tau}} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_{\rho}} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_{\sigma}} = 0$$

[14] Renunciando à escolha da coordenadas obrigada a g = 1 ficam *quatro* funções especiais disponíveis apra a liberdade de escolha, correspondentes às quatro funções arbitrárias de que se pode dispor livremente para estabelecer as coordenadas.

cujo primeiro membro é, em conformidade com (37), um tensor anti-simétrico de terceira ordem. O sistema (60) é, portanto, formado essencialmente por quatro equações, que se explicitam do modo seguinte:

(60 a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0 \\ \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Este sistema de equações corresponde ao segundo sistema de equações de Maxwell. Isso reconhece-se imediatamente pondo

(61)
$$\begin{cases} F_{23} = \hbar x & F_{14} = e_x \\ F_{31} = \hbar y & F_{24} = e_y \\ F_{12} = \hbar z & F_{34} = e_{z'} \end{cases}$$

Poderemos então, empregando a notação habitual da análise vectorial de três dimensões, escrever em vez de (60 a)

(60 b)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hbar}{\partial t} + rot\, e = 0 \\ div\ \hbar = 0 \end{cases}$$

O primeiro sistema de Maxwell obtém-se por generalização da forma dada por Minkowski. Introduziremos para isso o seguinte sextivector contravariante correspondente a $F_{\alpha\beta}$

(62)
$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

e igualmente o quadrivetor contravariante J^{μ} da densidade de corrente elétrica no vazio. Em vista de (40), o seguinte sistema de equações é então invariante para substituições arbitrárias que tenham determinante igual a 1 (em conformidade com a escolha de coordenadas que resolvemos adaptar):

(63)
$$\frac{\partial \backslash F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = J\mu$$

Pondo, com efeito,

(64)
$$\begin{cases} F_{23} = \hbar'_x & F_{14} = -e'_x \\ F_{31} = \hbar'_y & F_{24} = -e'_y \\ F_{12} = \hbar'_z & F_{34} = -e'_z \end{cases}$$

grandezas que, no caso particular da teoria da relatividade especial, são iguais a h_x ... e_x , além disso

$$J^1 = \mathbf{i}_x, \quad J^2 = \mathbf{i}_y, \quad J^3 = \mathbf{i}_{x'}, \quad J^4 = \rho,$$

obtém-se, em vez de (63),

(63 a)
$$\begin{cases} rot\ \hbar' - \dfrac{\partial e'}{\partial^{\ t}} = i \\ div\ \ e' = p \end{cases}$$

As equações (60), (62) e (63) constituem, assim, a generalização das equações de campo de Maxwell para o vazio e com a convenção que adaptamos para a escolha das coordenadas.

As componentes de energia do campo electromagnético. Formemos o produto interno

(65) $$x\sigma = F_{\sigma\mu} J^{\mu}$$

Em notação tridimensional as suas componentes exprimir-se-ão, em conformidade com (61), do modo seguinte:

(65 a)
$$\begin{cases} x_1 = pe_x + [i, \hbar]\ x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_4 = -(i, e). \end{cases}$$

$x\sigma$ é um quadrivetor covariante cujas componentes são iguais à quantidade de movimento negativa, ou à energia que, por unidade de tempo, ou de volume, respectivamente, são transferidas das massas elétricas para o campo electromagnético, Se as massas elétricas forem livres, isto é, se não estiverem sujeitas senão à influência do campo electromagnético, então o quadrivetor covariante $x\sigma$ torna-se nulo.

Para obtermos as componentes de energia $T^{\nu}_{\ \sigma}$ do campo electromagnético não temos mais que dar à equação $x_\sigma = 0$ a forma da equação (57). De (63) e (65) resulta diretamente

$$x_\sigma = F_{\alpha\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\sigma\mu} F^{\mu\xi\nu}) - F^{\mu\rho} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}$$

O último termo consente, em virtude de (60), a transformação

$$F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}$$

podendo ainda a última expressão, por razões de simetria, ser escrita na forma

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{dx_\sigma}+g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{dx_\sigma}F_{\mu\nu}\right]$$

à qual podemos ainda dar a forma

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right)$$

O primeiro destes termos escreve-se abreviadamente

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

o segundo dá, depois de se efetuar a diferenciação e de algumas transformações

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}$$

Reunindo os três termos calculados, obtém-se a relação

(66) $$x_\sigma=\frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau^\nu \quad , \qquad \textit{onde}$$

(66 a) $$T_\sigma^\nu=-F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Em virtude de (30), a equação (66) é equivalente a (57) ou a (57 a) quando x_σ se reduz a zero. Os o T^ν são por isso as componentes de energia do campo electromagnético. Com o auxílio de (61) e (640 $^\sigma$ mostra-se facilmente que ests componentes conduzem às bem conhecidas expressões de Maxwell-Poynting no caso da teoria da relatividade especial.

Até agora fizemos a dedução das leis gerais a que obedecem a matéria e o campo gravitacional utilizando sempre um sistema de coordenadas para a qual $\sqrt{-g} = 1$. Conseguimos assim considerável simplificação nas fórmulas e cálculos, sem deixar de satisfazer à existência da covariância geral: e isto porque foi a partir de equações de covariância geral que, por particularização do sistema de coordenadas, encontramos as nossas equações.

Não deixa de ter interesse formal a questão de se saber se, sem essa particularização de coordenadas, mas com uma definição correspondentemente mais geral para as componentes energéticas do campo gravitacional e da matéria, não teriam validade leis de conservação com a forma da equação (56), bem como equações de campo de gravitação do gênero das equações (52) ou (52 a), a tal modo que no primeiro membro figurasse uma divergência (no significado habitual) e no segundo membro a soma das componentes energéticas da matéria e da gravitação. Eu cheguei efetivamente à conclusão de que a resposta é afirmativa para os dois casos, Julgo, porém, que não tem interesse apresentar uma exposição mais ampla dessas minhas reflexões sobre o assunto, visto que nada de verdadeiramente novo brota delas.

§ 21. A teoria de Newton como uma primeira aproximação

Como já temos dito diversas vezes, a teoria d relatividade especial caracteriza-se, como caso particular da teoria geral, pelo fato de os $g_{\mu\nu}$ tomarem os valores constantes (4). Mas, como também já foi dito atrás, tomar tais valores significa desprezar inteiramente os efeitos da gravidade. Situar-nos-emos mais perto da realidade se admitirmos que os $g_{\mu\nu}$ têm valores diferentes de (4), sendo porém os respectivos desvios de tal modo pequenos (em confronto com 1) que se podem desprezar as grandezas de grau igual ou superior a 2 se formem com eles. (Primeiro ponto de vista da aproximação)

Além desta hipótese sobre os valores dos $g_{\mu\nu}$, vamos admitir mais o seguinte: que no domínio espaço-temporal considerado os $g_{\mu\nu}$ tendem para os valores (4) quando as coordenadas de espaço tendem para o infinito, desde que a escolha das coordenadas se faça de modo adequado: o que eqüivale a dizer que os campos de gravidade que se vão considerar serão exclusivamente campos criados por matéria situada no domínio do finito.

Pode dizer-se que é destas aproximações que vai resultar a teoria de Newton ; mas, para chegar a ela, é ainda necessário introduzir um segundo ponto de vista no método aproximado de manipulação das equações fundamentais.

Consideremos o movimento de um ponto material segundo (46). No caso da teoria da relatividade especial as componentes

$$\frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds}$$

podem tomar quaisquer valores; o que significa ser possível qualquer velocidade

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}$$

contanto que seja inferior à velocidade da luz no vazio ($v < 1$). Se nos limitarmos, porém, ao caso de v ser pequena em confronto com a velocidade da luz — e é esse o caso quase exclusivo da experiência — então as componentes

$$\frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds}$$

deverão ser tratadas como quantidades pequenas, ao passo que dx_4 / ds se deve considerar, até à segunda ordem de grandeza, igual a 1. (Segundo ponto de vista da aproximação).

Notemos agora que, segundo o primeiro ponto de vista da aproximação, as grandezas $\mathbf{T}^{\tau}_{\mu\nu}$ são todas quantidades pequenas, de primeira ordem pelo menos. Basta então olhar para (46) para reconhecer que, em obediência ao segundo ponto de vista da aproximação, só são de considerar os termos par os quais $\mu = \nu = 4$. Procedendo assim as equações (46) simplificam-se, convertendo-se nas seguintes (que representam o que resta quando nos limitamos aos termos de ordem mais baixa).

$$\frac{d^2 x_t}{dt^2} = T^{\tau}_{44}$$

onde se tomou $ds = dx_4 = dt$. Se agora, no cálculo dos $\mathbf{T}^{\tau}_{44}$, conservarmos apenas os termos que, segundo o primeiro ponto de vista da aproximação são de primeira ordem, as equações anteriores reduzir-se às seguintes

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \left[{44 \atop \tau}\right] \left(\tau = 1,2,3\right)$$

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} = -\left[{44 \atop \tau}\right]$$

Se, além disso, admitirmos que o campo de gravidade é quase-estático, limitando-nos assim a considerar casos em que a matéria geradora do campo só lentamente se pode mover (em confronto com a velocidade de propagação da luz) então no cálculo dos segundos membros das últimas equações poderemos desprezar derivadas em ordem ao tempo perante as derivadas em ordem às coordenadas de posição. Restará então

(67) $$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1,2,3)$$

Estas equações são as do movimento do ponto material na teoria de Newton, desempenhando $g_{44}/2$ o papel do potencial de gravidade. O que há de notável neste resultado é o fato de bastar a componente g_{44} do tensor fundamental para determinar, em primeira aproximação, o movimento do ponto material.

Passemos agora às equações de campo (53).

Aqui há que ter conta que o tensor energia da "matéria", considerada em sentido lato, é determinado quase exclusivamente pela densidade ρ da matéria considerada em sentido estrito, isto é, pelo segundo termo do segundo membro de (58) [ou (58 a), para o tensor covariante, ou (58 b), para o misto]. Dentro da aproximação que nos interessa, todas as suas componentes se reduzem a zero exceto $T_{44} = \rho = T$.

Quanto ao primeiro membro de (53), deve notar-se que o seu segundo termo é uma quantidade pequena de segunda ordem; e que o primeiro dá, dentro da aproximação que nos interessa,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[{\mu\nu \atop 1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[{\mu\nu \atop 2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[{\mu\nu \atop 3}\right] + \frac{\partial}{\partial x_4}\left[{\mu\nu \atop 4}\right]$$

o que dá, tomando $\mu = \nu = 4$ e desprezando derivadas em ordem ao tempo

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right)=-\frac{1}{2}\,\Delta g_{44}$$

A quarta das equações (53) dá pois

(68) $$\Delta g_{44} = x\rho \, .$$

As equações (67) e (68) são, em conjunto, equivalentes à lei de newtoniana da gravitação.

Dessas equações [(67) e (68)] resulta, para o potencial gravitacional, a expressão

(68 a) $$-\frac{x}{8\pi}\int\frac{p\,d_\tau}{r}$$

enquanto que a teoria de Newton dá, para a unidade de tempo que escolhemos,

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{p\,d_\tau}{r}$$

onde K representa a constante 6,7 . 10^{-8} , habitualmente denominada constante de gravitação. Confrontando as duas expressões, vem

(69) $$x=\frac{8\pi K}{c^2} = 1,,87 \, . \, 10^{-27}$$

§ 22 . Comportamento de réguas e relógios no campo de gravidade estático. Curvatura dos raios de luz. Movimento do periélo das órbitas dos planetas

Para chegarmos à teoria de Newton como primeira aproximação, apenas tivemos necessidade de calcular g_{44} entre as 10 componentes $g_{\mu\nu}$ do campo gravitacional, por ser ela a única dessas componentes que entra na equação (67), primeira aproximação da equação do movimento do ponto material. mas daqui já se deixa ver que há ainda outras componentes entre os $g_{\mu\nu}$ cujos valores se devem desviar em primeira aproximação dos valores dados em (4): porque tal desvio é exigido pela condição $g = — 1$.

Se o ponto material gerador do campo se encontra situado na origem do sistema de coordenadas, obtém-se, em primeira aproximação, a seguinte solução de simetria radial

(70)
$$\begin{cases} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \dfrac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \; (\rho \, e \, \sigma \; entre \; 1 \; e \; 3) \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \; (\rho \; entre \; 1 \; e \; 3) \\ g_{44} = 1 - \dfrac{\alpha}{r} \end{cases}$$

tendo $\delta_{\rho\sigma}$ o valor 1 ou o valor 0, consoante for, respectivamente $\rho = \sigma$ ou $\rho \neq \sigma$; e sendo r a grandeza

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Em vista de (68 a),

(70 a)
$$\alpha = \frac{x\,M}{4\pi}$$

se designarmos por *M* a massa que gera o campo. É fácil verificar que esta solução satisfaz em primeira aproximação as equações de campo (no exterior da massa).

Vamos agora investigar a influência que o campo da massa *M* exerce sobre as propriedades métricas do espaço. Continua a ser válida a relação

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, d\,x_\mu\, dx_\nu$$

existe entre os comprimentos e tempos medidos "localmente", *ds* , de um lado, e as diferenças de coordenadas, dx_ν , do outro.

Se uma régua unidade estiver, por exemplo, colocada em posição "paralela" ao eixo *x* , tomaremos $ds^2 = -1$; $dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0$, e será portanto $-1 = g_{11}\, dx_1^2$.

Se a régua unidade estiver assente no eixo do x, verifica-se, além da relação anterior, ainda a seguinte, dada pela primeira das equações (70)

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$$

Destas duas relações resulta, com o rigor da primeira aproximação,

(71)
$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}$$

Vê-se assim que a régua unidade, quando está colocada radialmente no campo gravitacional, apresenta em relação ao sistema de coordenadas, em conseqüência da existência do campo, um encurtamento, cujo valor é o que acabamos de encontrar.

De um modo análogo se pode obter o comprimento da régua expresso nas coordenadas, quando ela estiver colocada em direção tangencial. Pondo, por exemplo,

$$ds^2 = -1; \; dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0 \; ; \; x_1 = r, \; x_2 = x_3 = 0 \, ,$$

(71 a) $$-1 = g_{22} \; dx_2^2 = - dx_2^2 \; ,$$

o que mostra que o campo de gravidade do ponto material não tem qualquer influência sobre o comprimento da régua quando esta influência sobre o comprimento da régua quando esta é colocada em posição tangencial.

Conclui-se então que a geometria euclidiana deixa de ser válida, mesmo em primeira aproximação, no campo da gravidade, se quisermos continuar a considerar a mesma régua, independemente da sua localização ou orientação, como materialização de um mesmo segmento de recta. No entanto, basta olhar para (70 a) ou para (69) para reconhecer que os desvios que se podem esperar em relação a essa geometria são demasiado pequenos para poderem ser revelados por medições feitas na superfície da Terra.

Investiguemos agora o ritmo de funcionamento de um relógio unidade que se encontra em repouso num campo gravitacional estático. Para um período de funcionamento do relógio tem-se

$$ds = 1 \; ; \; dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0 \; .$$

É portanto

$$1 = g_{44} \; dx_4^2$$

(72)
$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(g_{44} - 1\right)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2} \qquad ou \quad 10)$$
$$dx_4 = 1 + \frac{x}{8\pi} \int \frac{\rho \, d_\tau}{r}$$

O relógio funciona, pois, com maior lentidão quando está colocado na proximidade de massas ponderáveis. Daqui resulta que as riscas espectrais da luz que nos chega da superfície de grandes astros devem apresentar-se desviadas para o extremo vermelho do espectro.[15]

Vamos ainda fazer o estudo da marcha dos raios luminosos no campo gravitacional estático. Segundo a teoria da relatividade especial a velocidade da luz é dada pela equação

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

e, então, segundo a teoria da relatividade geral será dada pela equação

(73) $$ds^2 = g_{\mu\nu} \, dx_\mu \, dx_\nu = 0.$$

[15] Segundo E. Freundlich, há observações espectrais sobre estrelas fixas de certos tipos que testemunham a existência dum efeito deste gênero. No entanto, está ainda por encontrar uma prova definitiva deste conseqüência.

Se for dada a direção, isto é, a razão $dx_1 : dx_2 : dx_3$, a equação (73) dá as quantidades

$$\frac{dx_1}{dx_4} \qquad \frac{dx_2}{dx_4} \qquad \frac{dx_3}{dx_4}$$

e, portanto, a velocidade

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = 7$$

definida no sentido da geometria euclidiana. Reconhece-se facilmente que a marcha dos raios de luz em relação ao sistema de coordenadas tem de ser curvilínea quando os $g_{\mu\nu}$ não forem constantes. Se n for uma direção perpendicular à direção de propagação da luz, o princípio de Huyghens mostra que o raio de luz [considerado no plano (y , n)] tem a curvatura $-\frac{\partial \gamma}{\partial \eta}$ 11). Vamos procurar determinar a curvatura que um raio de luz adquire quando passa à distância Δ de uma massa M . Se escolhermos o sistema de coordenadas em conformidade com o esquema ao lado, a deflexão total β do raio de luz (considerada positiva quando a concavidade ficar voltada para a origem) é dada com suficiente aproximação por

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{d\,x_1} dx_2$$

enquanto que (73) e (70) dão 12)

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right)$$

Efetuando o cálculo do integral, chega-se a 13)

(74) $$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{x\,M}{2\pi\,\Delta}$$

Um raio de luz que passe próximo do Sol sofre, deste modo, uma deflexão de 1,7″ e um raio que passe junto de Júpiter sofre uma deflexão de uns 0,02″ .

Se calcularmos o campo gravitacional com uma aproximação maior, e se, com rigor correspondente, calcularmos também o movimento planetário de um ponto material cuja massa se possa considerar, em valor relativo, infinitamente pequena, encontraremos, em relação às leis de Kepler-Newton referentes aos movimentos planetários, um desvio que se traduz no seguinte: a glória elíptica do planeta efetua, no sentido do movimento de revolução do planeta, uma lenta rotação, cujo valor angular por revolução é o seguinte :

(75) $$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 \left(1 - e^2\right)}$$

Nesta fórmula, a designa o semi-eixo maior, *c* o habitual valor d velocidade da luz, *e* a excentricidade, ***T*** o tempo de revolução em segundos.[16]

Para a rotação da órbita do planeta Mercúrio o cálculo dá um valor de 43″ por século, em correspondência exata com os resultados dos astrônomos (Leverrier): estes, com efeito, tinham reconhecido haver no movimento do perihélio de Mercúrio uma parte que não podia ser atribuída a perturbações causadas por outros planetas, e que essa parte tinha o valor que acabamos de indicar.

Notas do Tradutor

1 - O primeiro termo, $g^{\mu\nu}\frac{\partial A\mu}{\partial x_\nu}$, é transformado em

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\mu\nu} A\mu\right) - A\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

2 - No texto alemão figura na terceira parcela $g^{\mu\nu}$ em vez de $g^{\tau\alpha}$.
3 - A redução é feita depois de o referido terceiro termo sofrer uma transformação análoga à mencionada na nota (1).
4 - Depois de multiplicado por $g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}$.
5 - No texto alemão aparece $R^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ em vez de $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$, certamente por lapso.
6 - neste caso, portanto, o tensor de Riemann não deve reduzir-se a zero, de contrário haveria a possibilidade de tal transformação, como se explicou no § 12.
7 - No fim do § 12 .
8 - Estas equações ("de Euler") constituem, como mostra o cálculo das variações, condição necessária e suficiente de estacionaridade do integral que figura em (47 a).
9 - Em virtude de (29) e de $\sqrt{-g} = 1$.
10 - O potencial gravitacional é dado por (68 a) e também por $g_{44} / 2$ adicionado de qualquer constante (neste caso - 1/2) .
11 - Entende-se aqui por "curvatura" o ângulo de deflexão por unidade de percurso (veja o artigo precedente "Sobre a influência da gravidade na propagação da luz", § 4).
12 - Para este cálculo, depois de substituir em (73) os valores dos vários $g\mu\nu$ dados por (70) e de introduzir γ^2 na expressão obtida, há que tornar $dx_3 / dx_4 = 0$, e que desprezar, por muito pequenos, termos em que entra a derivada dx_1 / dx_4.
13 - Para a integração convém a mudança de variável $x_2 = \Delta tg\ \varphi$.

Este texto foi extraído do livro:
TEXTOS FUNDAMENTAIS DA FÍSICA MODERNA
VOLUME I
“O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE”
FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN