

Acelera Brasil!



Suponhamos que tenha sido realizado um estudo que avalia dois novos veículos do mercado: o Copa e o Duna.

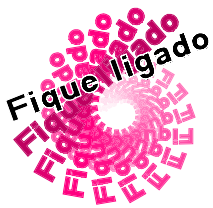
As pesquisas levantaram os seguintes dados:

VEÍCULO	COPA	DUNA
Velocidade máxima	50 m/s (180 km/h)	50 m/s (180 km/h)
Velocidade após 10 segundos	30 m/s (108 km/h)	20 m/s (72 km/h)

Levando em conta apenas essas informações, você seria capaz de responder: **qual é o melhor?**

Para poder responder, é preciso analisar as informações fornecidas.

- Quanto à **velocidade máxima atingida** os dois podem andar no máximo a 180 km/h: houve empate e não podemos responder à pergunta.
- Quanto à **velocidade do veículo após 10 segundos** são diferentes nos dois casos, mas para afirmar qual é o melhor precisamos saber o que indica essa medida, isto é, entender o seu **significado**.



Entendendo mais sobre a pesquisa

Veja como ela foi realizada: inicialmente os veículos estavam parados; portanto suas velocidades eram nulas (zero). Num dado momento, o juiz deu a largada e os dois partiram numa **pista reta**.

O primeiro fato importante que você deve observar é que a velocidade deixa de ser nula após a largada. Isso quer dizer que houve **variação da velocidade**.

O segundo fato importante é que no **mesmo tempo** (10 segundos) o Copa atinge 30 m/s e o Duna apenas 20 m/s.

A segunda medida relaciona duas grandezas: **a variação da velocidade e o tempo gasto para ocorrer essa variação**. Observe a Tabela 2.

VEÍCULO	COPA	DUNA
Velocidade inicial	0	0
Velocidade final	30 m/s	20 m/s
Variação da velocidade	30 m/s	20 m/s
Intervalo de tempo	10 s	10 s

Veja que a velocidade do Copa variou de **0 a 30 m/s** e a velocidade do Duna variou de **0 a 20 m/s nos mesmos 10 segundos!**

Você já sabe qual é a velocidade de cada veículo após 10 segundos, mas...

O que ocorre com a velocidade a cada instante?

COPA		DUNA	
v (m/s)	t (s)	v (m/s)	t (s)
0	0	0	0
6	2	4	2
12	4	8	4
18	6	12	6
24	8	16	8
30	10	20	20

A Tabela 3 indica, para alguns instantes, o valor da **velocidade** marcada pelo velocímetro. Observe que, à medida que o tempo passa, a velocidade varia para ambos os veículos.

Observe que num mesmo instante, a velocidade do Copa é **maior** do que a do Duna. Pode-se dizer que o Copa é melhor, porque “arranca” mais rápido.

Uma nova grandeza física

Quando falamos em “arranque”, na verdade estamos nos referindo à relação entre duas grandezas: **variação da velocidade** e **tempo**. Essa nova grandeza, que nos ajudou a decidir qual dos dois é o melhor é uma grandeza física e recebe o nome de **aceleração**.

Aceleração é uma medida da variação da velocidade de um corpo num certo intervalo de tempo.

Esse é o **conceito de aceleração**. Pode-se também definir aceleração com a ajuda da Matemática. Como calcular a aceleração?

Pegue, na Tabela 3, o valor da velocidade em dois instantes quaisquer e calcule inicialmente a variação da velocidade (Δv), isto é, a diferença entre as duas e o intervalo de tempo correspondente (Δt). Por exemplo, para o Copa:

$$\begin{array}{l} t_1 = 2\text{s} \quad \text{e} \quad v_1 = 6 \text{ m/s} \\ t_2 = 8\text{s} \quad \text{e} \quad v_2 = 24 \text{ m/s} \end{array} \quad \text{E} \quad \begin{array}{l} \Delta v = v_2 - v_1 = 24 - 6 = 18 \\ \Delta t = t_2 - t_1 = 8 - 2 = 6 \end{array}$$

Para calcular a aceleração, basta dividir essa variação pelo intervalo de tempo necessário para que ela ocorra. Definimos:

$$\text{Aceleração E } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Assim teremos:

$$a = \frac{18}{6} = 3(?)$$

Qual a unidade usada para a grandeza **aceleração**?

Com a mão na massa

Uma unidade para a aceleração

Veja que a grandeza aceleração vem da combinação de duas outras grandezas: **velocidade** e **tempo**, portanto a sua unidade é obtida a partir das unidades dessas duas grandezas. Observe que a velocidade do Duna varia “dois metros por segundo” a cada “segundo”, assim teremos “metro por segundo por segundo”, abreviando $\text{m/s} \cdot \text{s}$ ou m/s^2 .

De forma geral, a unidade da aceleração é dada por uma unidade de comprimento dividida por uma unidade de tempo ao quadrado.

Portanto, a aceleração do Copa é 3 m/s^2 . **Lembre-se:** uma grandeza física deve sempre vir acompanhada de sua unidade (Aula 2).

Nesse caso, se você calcular a aceleração para dois instantes de tempo **quaisquer** irá obter **sempre o mesmo valor**. Isso quer dizer que **a aceleração não varia**. Podemos concluir que:

Nesse movimento a aceleração é constante.

Com a mão na massa

Verifique essa afirmação calculando a aceleração para quatro intervalos de tempo diferentes para o Copa e quatro para o Duna.

Outra maneira de representar um conjunto de dados

Os dados da Tabela 3 podem ser representados por um gráfico, basta marcar os valores de **v** e **t**, isto é, v_1 e t_1 , v_2 e t_2 , v_3 e t_3 , v_4 e t_4 , v_5 e t_5 e uni-los com uma reta:

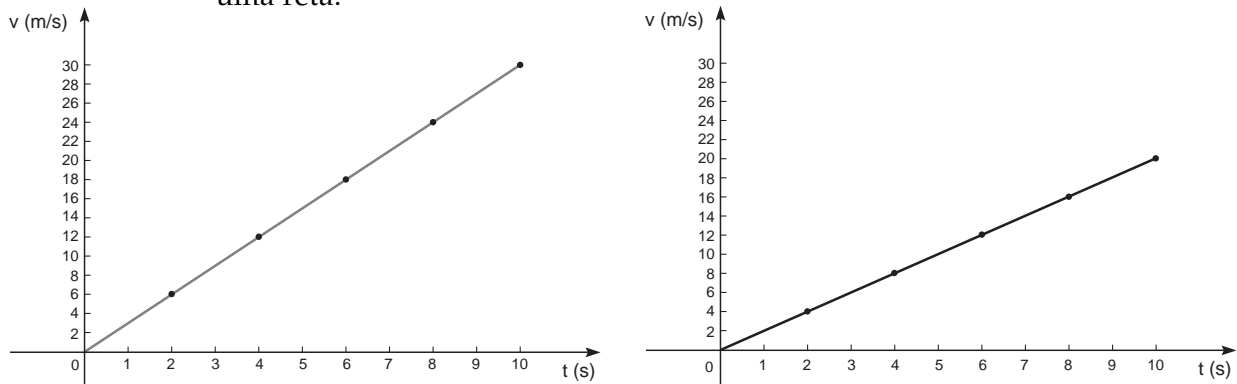


Figura 1. Gráficos $v \times t$ para o Copa (à esquerda) e para o Duna (à direita).

Você viu como calcular a aceleração a partir dos dados da Tabela 3. Viu que, com esses mesmos dados, foi construído o gráfico da Figura 1. Portanto o gráfico e a tabela **representam o mesmo conjunto de dados**. Logo, deve ser possível obter o valor da aceleração a partir do gráfico. Agora, observe o gráfico da Figura 2, que mostra a velocidade do Duna em função do tempo.

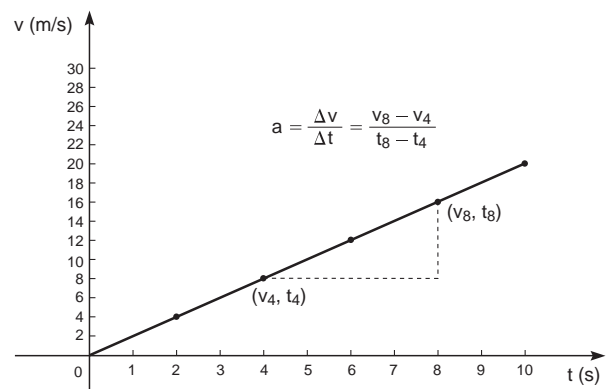


Figura 2. Gráfico $v \times t$ para o Duna.

Tome dois pontos, por exemplo os pontos $(v_4 \text{ e } t_4)$ e $(v_8 \text{ e } t_8)$.

Pela definição, a aceleração é obtida dividindo-se a variação da velocidade (representada pela linha pontilhada vertical) pelo intervalo de tempo (representado pela linha pontilhada horizontal). Assim teremos:

$$a = \frac{16 - 8}{8 - 4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s}^2$$

Observe o gráfico da Figura 3; nele estão representadas as retas que descrevem as velocidades do Copa e do Duna em função do tempo.

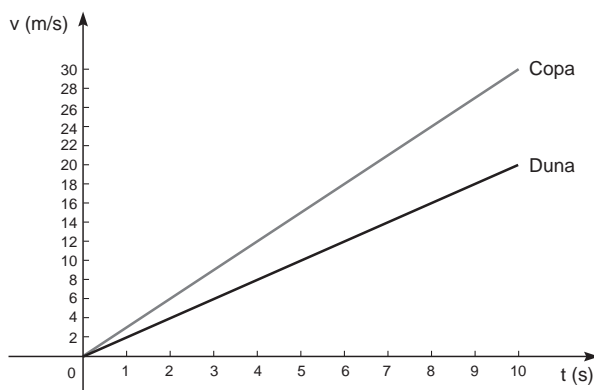


Figura 3. Gráfico de $v \times t$ do Copa e do Duna.

Observe que a reta que representa o movimento do Copa é mais inclinada, e lembre-se de que ele tem maior aceleração. Portanto, pode-se afirmar que:

Num gráfico de velocidade em função do tempo $v \times t$ (que se lê "v versus t"), quanto maior for a aceleração mais inclinada será a reta que representa o movimento.

Prevendo resultados

TABELA 4	
v (m/s)	t (s)
$v_0 = 3$	$t_0 = 0$
$v_1 = 6$	$t_1 = 1$
$v_2 = 9$	$t_2 = 2$
$v_3 = 12$	$t_3 = 3$
$v_4 = 15$	$t_4 = 4$

Será possível conhecer a velocidade dos veículos em outros instantes, por exemplo, quando $t = 9$ segundos?

A resposta é sim! Mas como? Veja: num certo momento, o co-piloto do Copa decidiu anotar os valores da velocidade, porém, o veículo **já estava em movimento naquele instante**. Observe na Tabela 4 os dados que ele anotou.

Você já conhece duas maneiras de representar um conjunto de dados: através de tabelas e de gráficos; mas existe outra!

Vamos calcular outra vez a aceleração do Copa, agora escolhendo o par (v_4, t_4) da tabela 4 e um par (v, t) qualquer:

$$\begin{array}{l} t_4 = 4\text{s} \\ t \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{e} \\ \text{e} \end{array} \quad \begin{array}{l} v_4 = 15 \text{ m/s} \\ v \end{array}$$

Podemos escrever:
$$a = \frac{v - 15}{t - 4}$$

Sabemos que a aceleração do Copa é 3 m/s^2 , assim:

$$3 = \frac{v - 15}{t - 4}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v - 15 &= 3(t - 4) \\ v - 15 &= 3 \cdot t - 12 \end{aligned}$$

então:

$$v = 3 + 3 \cdot t$$

Essa função matemática fornece o valor da velocidade em função do tempo. Ela é chamada de **função horária da velocidade** que descreve o movimento do copa, que recebe o nome de Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Retilíneo, pois o veículo anda em linha reta; variado, pois sua velocidade varia; e uniformemente vem do fato de a aceleração ter sempre o mesmo valor e, portanto, a velocidade varia sempre da mesma forma (uniforme).

Note que, para o instante $t = 0 \text{ s}$, obtém-se $v_0 = 3 \text{ m/s}$; e, se você observar a Tabela 4, verá que essa é a velocidade inicial, isto é, no instante em que o co-piloto iniciou as anotações!

De uma maneira geral, podemos escrever para a velocidade v num instante t qualquer:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

onde v_0 é a velocidade inicial (em $t=0$) e a é a aceleração, que é constante.

Agora é possível responder qual o valor da velocidade quando $t = 9 \text{ s}$! É só substituir o tempo na função horária da velocidade:

$$v_9 = 3 + 3 \cdot 9 = 3 + 27 = 30 \text{ m/s}$$

Como saber onde o veículo estará num certo instante?

Na aula passada, você estudou o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), caso em que a velocidade não varia, ela é constante. Para descrever o MRU você estudou apenas como varia a **posição** em função do tempo.

Nesta aula você está estudando um movimento em que, além de a posição variar, varia também a velocidade.

Mas como varia a **posição no MRUV**? É claro que ela varia, pois esse fato caracteriza um estado de movimento!

Você é capaz de se lembrar como foi calculado o deslocamento do carro no MRU?

Foi pelo gráfico da velocidade em função do tempo ($v \times t$): a área da figura formada pelo gráfico fornece o deslocamento.

Pode-se fazer de forma semelhante para o caso do MRUV. O quadro, no final da aula, indica, passo a passo, como obter a função horária da posição do MRUV:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

onde x_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial, e a é a aceleração.

Nesse caso, como será o gráfico da posição em função do tempo? Você espera que seja uma reta como no MRU?

Note que essa função é diferente daquela obtida para a velocidade: ela contém uma terceira parcela proporcional ao quadrado do tempo (t^2). Isso faz com que o gráfico não seja mais uma reta, mas uma curva.

Para construir o gráfico de posição (x) por tempo (t) a partir da função é útil, inicialmente, fazer uma tabela que indique os valores de x e t . Para encontrar as posições, basta substituir o tempo na função e calcular o valor de x !

Mas é preciso também conhecer o valor de x_0 e v_0 .

Tome, por exemplo, a Tabela 4. No instante inicial, isto é, quando começam a anotar os valores de v , a velocidade era 3 m/s; portanto, $v_0 = 3$ m/s. Suponha que nesse instante o carro passou pelo marco 100 m da pista. Portanto, $x_0 = 100$ m. Lembre-se de que a aceleração do Copa, nesse exemplo é $a=3$ m/s².

Substituindo esses valores na função horária da posição temos:

$$x = 100 + 3 \cdot t + 1,5 \cdot t^2$$

Essa função descreve o **movimento do Copa** e fornece sua posição x em qualquer instante de tempo t .

Como exemplo, vamos calcular a posição no instante $t = 2$ s.

$$\begin{aligned} x &= 100 + 3 \cdot 2 + 1,5 \cdot 2^2 \\ x &= 100 + 6 + 6 = 112 \text{ m} \end{aligned}$$

Prosseguindo dessa maneira, é possível obter os outros valores e montar a Tabela 6:

TABELA 6	
v (m/s)	t (s)
$x_0 = 100$	$t_0 = 0$
$x_1 = 104,5$	$t_1 = 1$
$x_2 = 112$	$t_2 = 2$
$x_3 = 122,5$	$t_3 = 3$
$x_4 = 136$	$t_4 = 4$
$x_5 = 152,5$	$t_5 = 5$

Agora é possível construir o gráfico da posição em função do tempo:

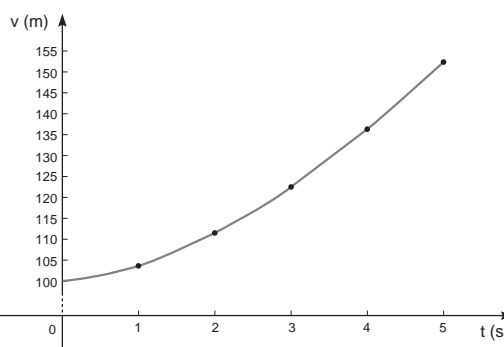


Figura 4

Observe que não se obtém mais uma reta: o gráfico é uma curva, que tem o nome de **parábola**.

É possível também representar as posições do veículo por intermédio de um eixo orientado, (lembre-se da Aula 3).

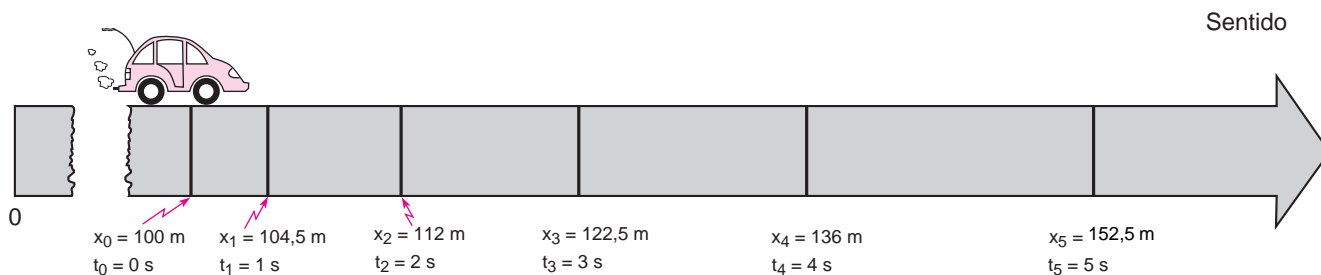


Figura 5

Observe na Figura 5 que, nesse caso, os deslocamentos aumentam com o tempo: a cada segundo o deslocamento é maior do que no instante anterior. Isso indica que a velocidade está aumentando: o movimento é variado, nesse caso dizemos que ele é **acelerado**.

Breeeeeca!

TABELA 5	
v (m/s)	t (s)
$v_0 = 30$	$t_0 = 0$
$v_1 = 25$	$t_1 = 1$
$v_2 = 20$	$t_2 = 2$
$v_3 = 15$	$t_3 = 3$
$v_4 = 10$	$t_4 = 4$
$v_5 = 5$	$t_5 = 5$
$v_6 = 0$	$t_6 = 6$

No meio da pista havia um cachorro, havia um cachorro no meio do pista! De repente o piloto do Copa avistou o animal e rapidamente acionou os freios. Sem perder tempo, o seu co-piloto anotou os valores da velocidade:

Note que a velocidade agora está **diminuindo**: o veículo está freando!

Qual será agora o valor da aceleração nesse caso? Pegue, por exemplo:

$$t_1 = 1 \text{ s e } v_1 = 25 \text{ m/s}$$

$$t_4 = 4 \text{ s e } v_4 = 10 \text{ m/s}$$

Calculando a aceleração:

$$a = \frac{v_4 - v_1}{t_4 - t_1} = \frac{10 - 25}{4 - 1} \quad \text{então: } a = -5 \text{ m/s}^2$$

Observe que o valor da aceleração é negativo! O sinal da aceleração é oposto ao da velocidade (que é positiva). Isso indica que o movimento é **desacelerado**, isto é, o carro está freando. Observe o gráfico v X t nesse caso:

Veja que a reta tem uma inclinação diferente do caso em que o movimento é acelerado quando a velocidade cresce.

Abaixo estão representados os gráficos v X t para os três casos; quando o movimento é **acelerado** ($a > 0$); quando é **desacelerado** ($a < 0$), ambos exemplos de Movimento Retilíneo Uniformemente Variado e; no caso especial, quando a aceleração é nula ($a = 0$): nesse caso, a velocidade não varia e temos um exemplo de Movimento Retilíneo Uniforme – MRU (Aula 3).

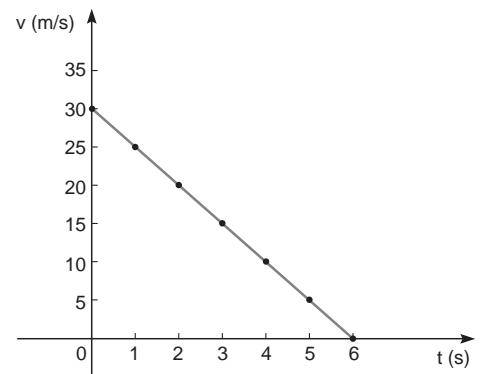


Figura 6

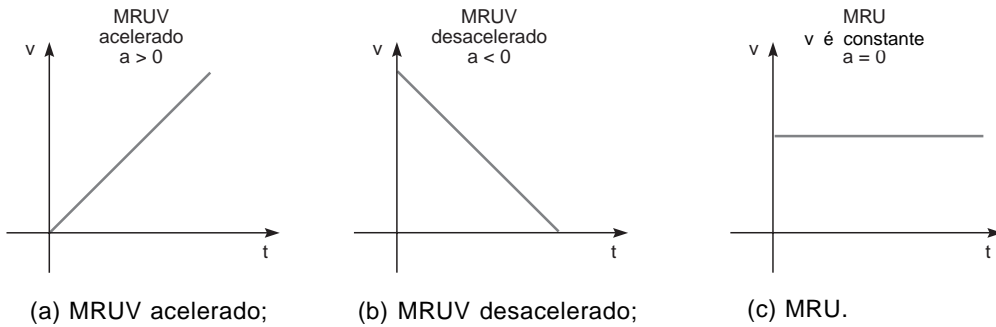


Figura 7

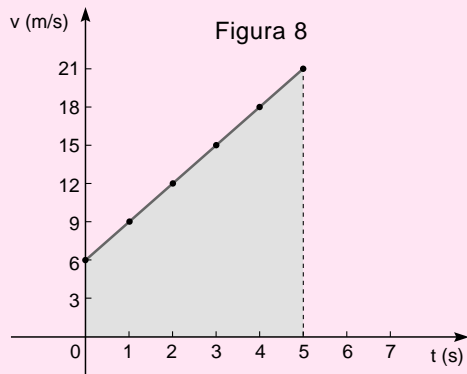
DEDUÇÃO DA FUNÇÃO HORÁRIA DA POSIÇÃO DO MRUV

Imagine que num certo instante, após a largada, o co-piloto do Copa decide anotar alguns valores da velocidade. Olha para o velocímetro e verifica que naquele instante a velocidade do veículo é 6 m/s; assim, essa é a sua “velocidade inicial”. Anota os dados:

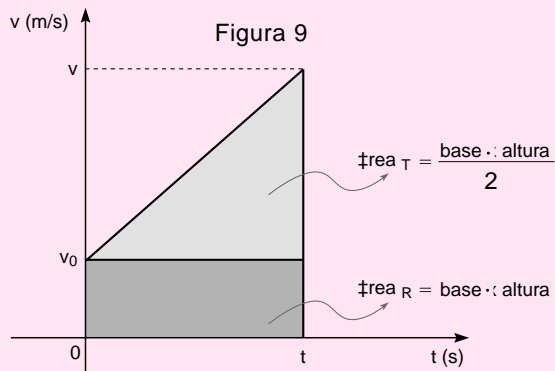
t (s)	v (m/s)
0	6
1	9
2	12
3	15
4	18
5	21

Observe que

Quando começou a anotar os valores de v o carro já estava em movimento, portanto, v_0 não é zero! Com esses dados constrói-se o gráfico (Figura 8):



Para se calcular a distância percorrida pelo carro, basta calcular a área da figura, que é um trapézio! Ela pode ser pensada como “um triângulo e um retângulo”. Assim fica fácil calcular a área!



A base do retângulo corresponde ao intervalo de tempo Δt e a altura corresponde a v_0 . Portanto, a área será:

$$\text{área}_R = \text{base} \cdot \text{altura} = \Delta t \cdot v_0$$

$$\text{área}_R = v_0 \cdot t$$

pois foi escolhido $t_0 = 0$ s.

O triângulo tem base Δt e altura Δv , que é a velocidade final menos a velocidade inicial naquele trecho. Portanto, a área do triângulo será:

$$\text{área}_T = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\Delta v \times \Delta t}{2}$$

usando a definição de aceleração

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \Delta v = a \Delta t$$

$$\text{área}_T = \frac{a \times \Delta t \times \Delta t}{2}$$

Lembrando que $t_0 = 0$ (portanto, $\Delta t = t$) e que $v(t_0) = v_0$, pode-se escrever a área do triângulo como:

$$\text{área}_T = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

E a área do trapézio, que é a soma das duas será:

$$\text{área}_{\text{total}} = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Como a área representa o deslocamento ($x_0 - x$), finalmente obtém-se:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

A expressão matemática que acabamos de obter permite conhecer a posição x num instante t qualquer, desde que se conheçam a posição inicial (x_0), a velocidade inicial (v_0) e a aceleração (a).



Nesta aula você aprendeu que:

- existe uma grandeza física, a **aceleração**, que relaciona mudança de velocidade e tempo, e que, como todas as grandezas físicas, possui uma unidade;
- além do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), onde a velocidade se mantém constante, existe um outro tipo de movimento, Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), no qual a velocidade varia, porém de maneira uniforme, o que implica que a **aceleração é constante**;
- a aceleração pode ser definida matematicamente;
- existem funções matemáticas para descrever esse movimento que permitem prever posições e velocidades em qualquer instante;
- que tabelas, gráficos e funções são diferentes maneiras de se representar um conjunto de dados, como posições e velocidades em função do tempo;
- se obtém a aceleração a partir da tabela (v, t) e por meio do gráfico ($v \times t$).



Exercício 1

Nesta aula você deve ter calculado alguns valores da aceleração e verificou que ela é constante. Como é o gráfico da aceleração em função do tempo?

Exercício 2

As posições de um trem, que percorre uma estrada reta, variam de acordo com a função:

$$x = 100 + 20t + 2t^2$$

onde as posições são dadas em metros e o tempo em segundos, responda, sem se esquecer das unidades:

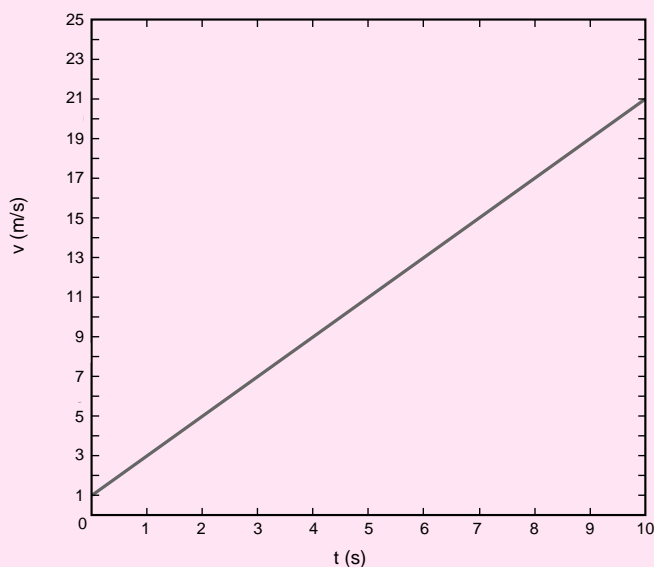
- Qual a posição inicial do trem, isto é, onde ele se encontrava quando $t = 0$ s?
- Qual é a velocidade inicial do trem?
- Qual é o valor da sua aceleração?
- Em que posição deverá estar no instante $t = 4$ s?

Exercício 3

Para o trem do Exercício 2, escreva a equação horária da velocidade e verifique qual a velocidade do trem no instante $t = 5$ s.

Exercício 4

É dado o gráfico da velocidade em função do tempo de um ciclista que se move em linha reta.



Responda:

- A velocidade do ciclista é constante? Qual o tipo de movimento que ele realiza?
- Qual a velocidade inicial do ciclista?
- Qual o valor da sua aceleração?
- Escreva a função horária da velocidade que representa este movimento.

Exercício 5

Suponha que o ciclista do exercício 4 se encontre inicialmente ($t = 0$) no marco 100 m de uma pista. Pede-se:

- A função horária da posição.
- Qual a posição do ciclista no instante $t = 5$ s?